

Synthèse de filtres numériques

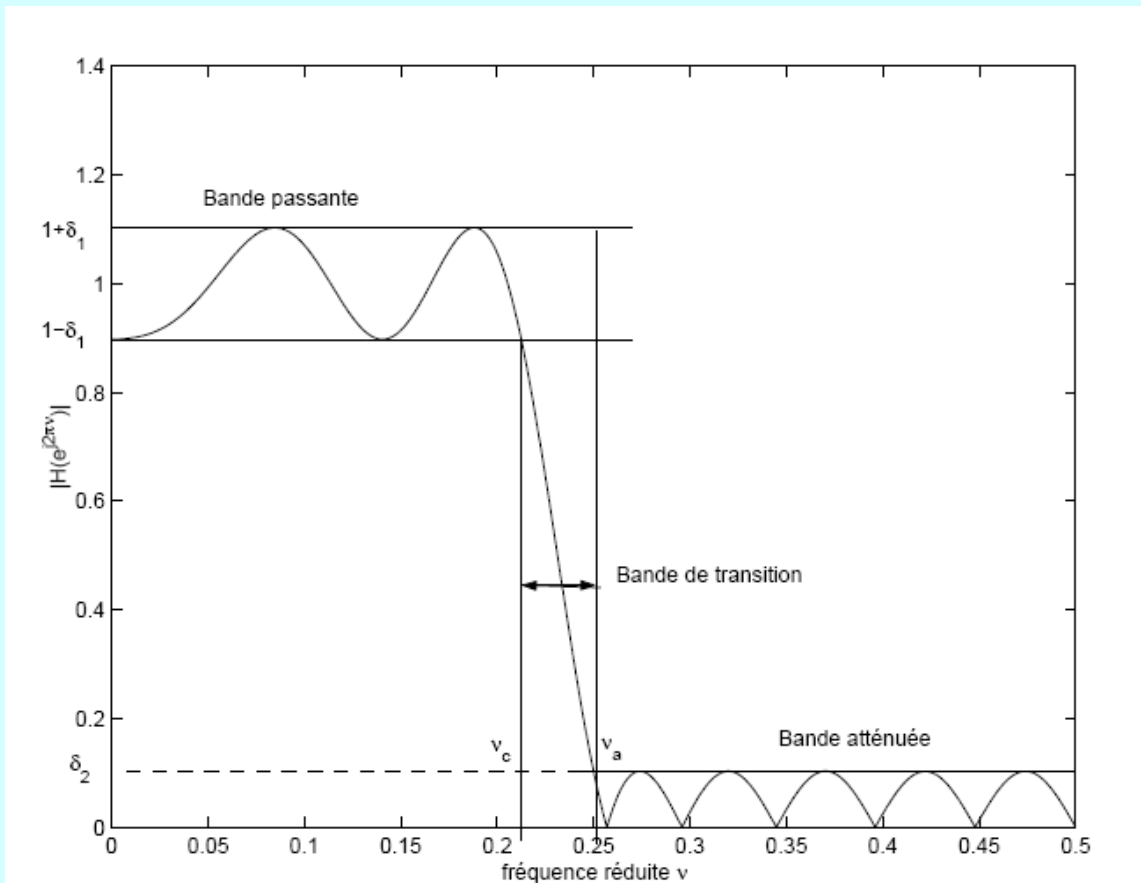
B. David
2016

Généralités
T. Bilineaire
RIF à ϕ linéaire

Critères de choix

- RIF ou RII ?
- RII :
 - + : complexité, imitation des filtres analogiques
 - - : pb d'arrondis de calcul cumulatifs, sensibilité à la représentation finie des coefficients, phase non linéaire
- RIF :
 - + : phase exactement linéaire possible, garantie de stabilité, non cumulation des erreurs de calcul (non récursifs)
 - - : complexité (par ex. pour traduire des résonances ou pour assurer une bonne sélectivité)

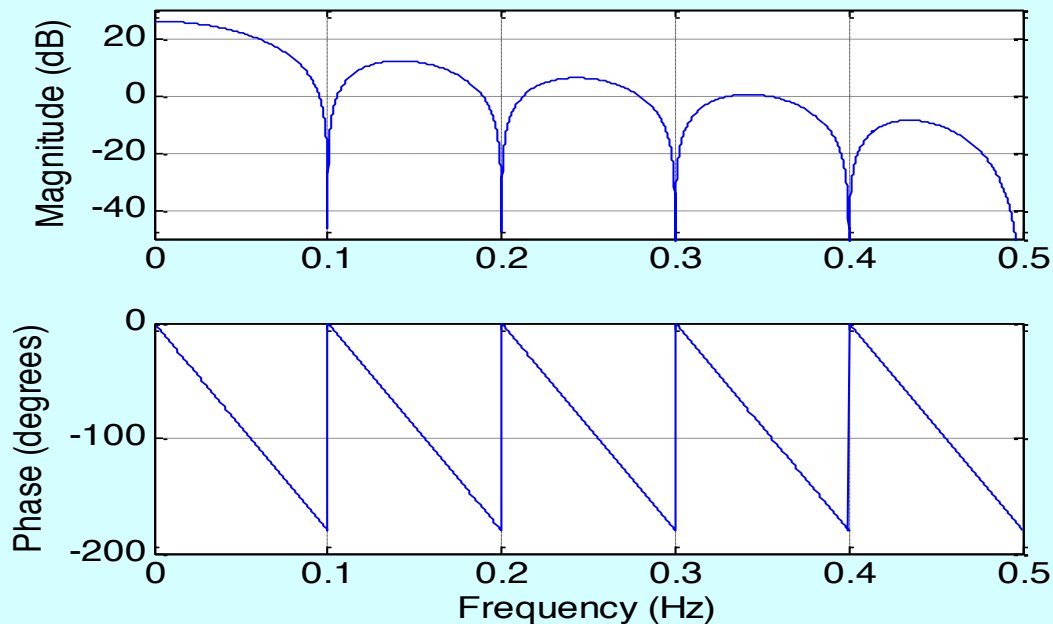
Spécifications d'un filtre numérique



construction empirique d'un filtre passe-bas IIR

- on suppose $H(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$
- pour construire *la bande atténuée*, on place des zéros en 0.1, 0.2... 0.5.

$$N(z) = K \prod_k (1 - z_k z^{-1})$$



Code

```
z = exp(j*2*pi*[0.1 .2
               .3 0.4 0.5]);
z = [z conj(z)];
N = poly(z);

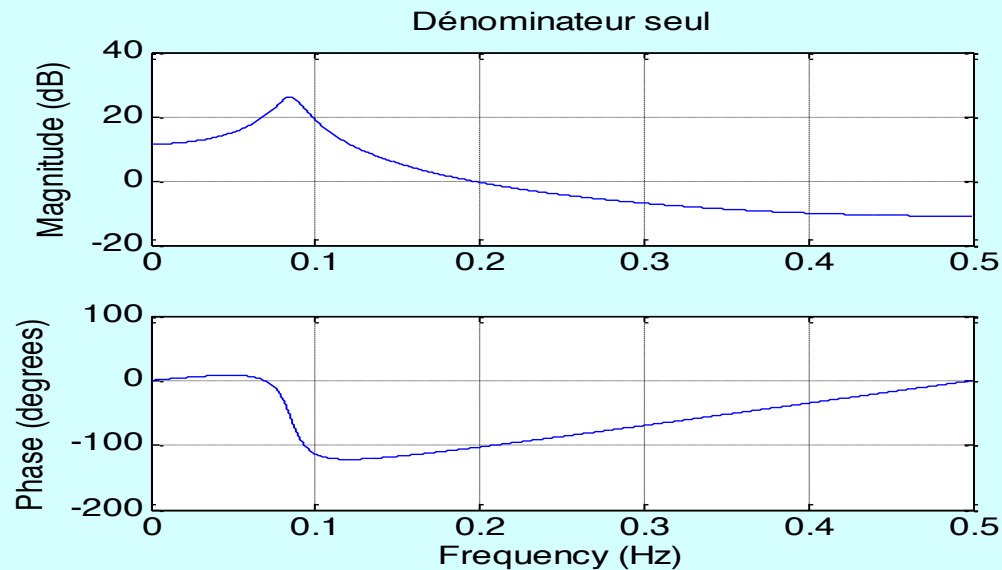
freqz(N,1,4096,1)
```

construction empirique d'un filtre passe-bas IIR

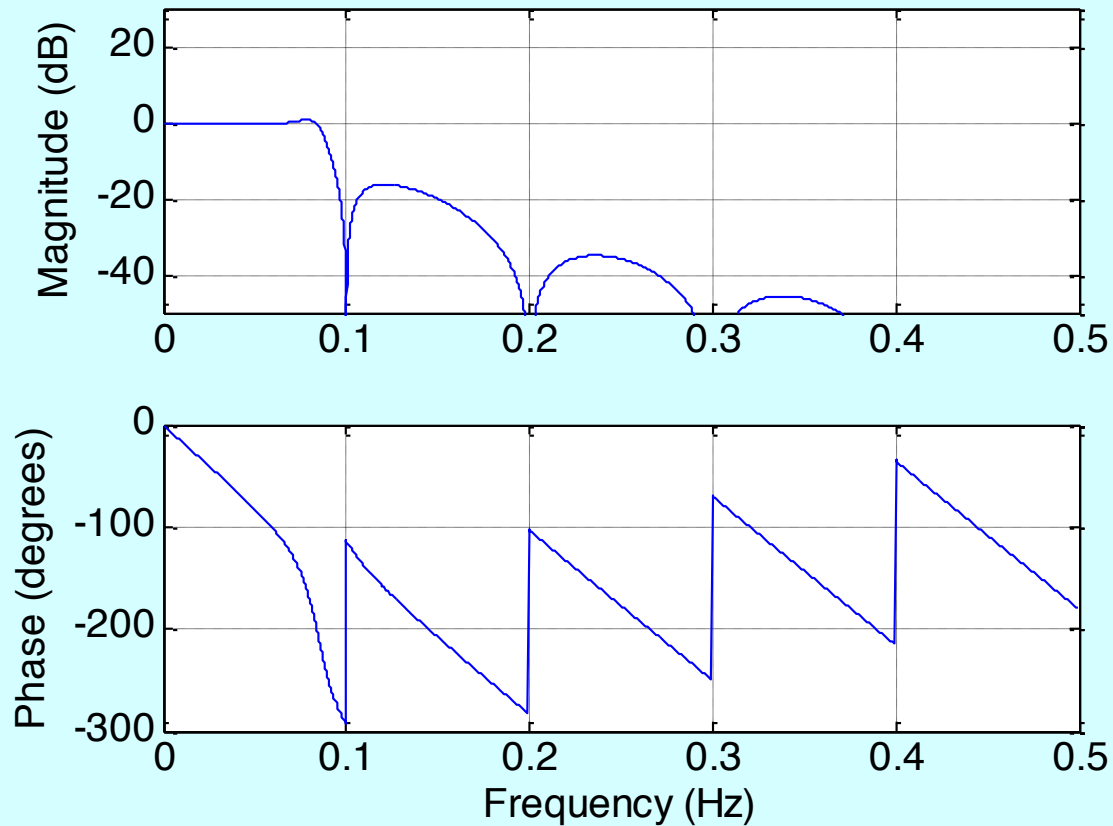
- le filtre n'est pas « plat » dans sa bande passante
- on cherche à compenser par le placement d'un pole tel que

$$D(z) = (1 - pz^{-1})(1 - p^*z^{-1})$$

$$|D(e^{j2\pi\nu})| \approx |N(e^{j2\pi\nu})|$$

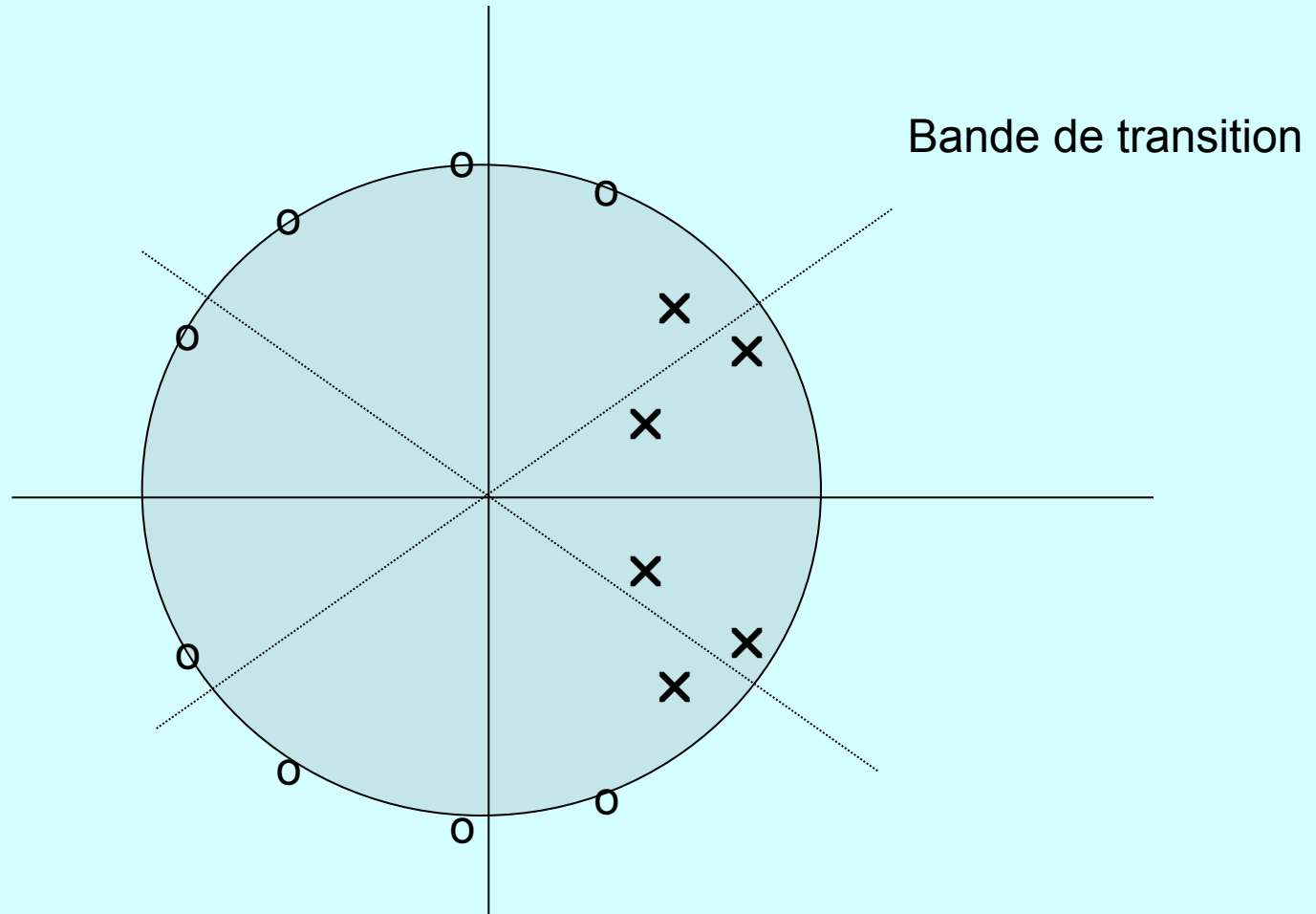


construction empirique d'un filtre passe-bas IIR



$$\text{ici, } p = 0.95e^{j2\pi 0.085}$$

diagramme poles-zeros typique



Transformation bilinéaire

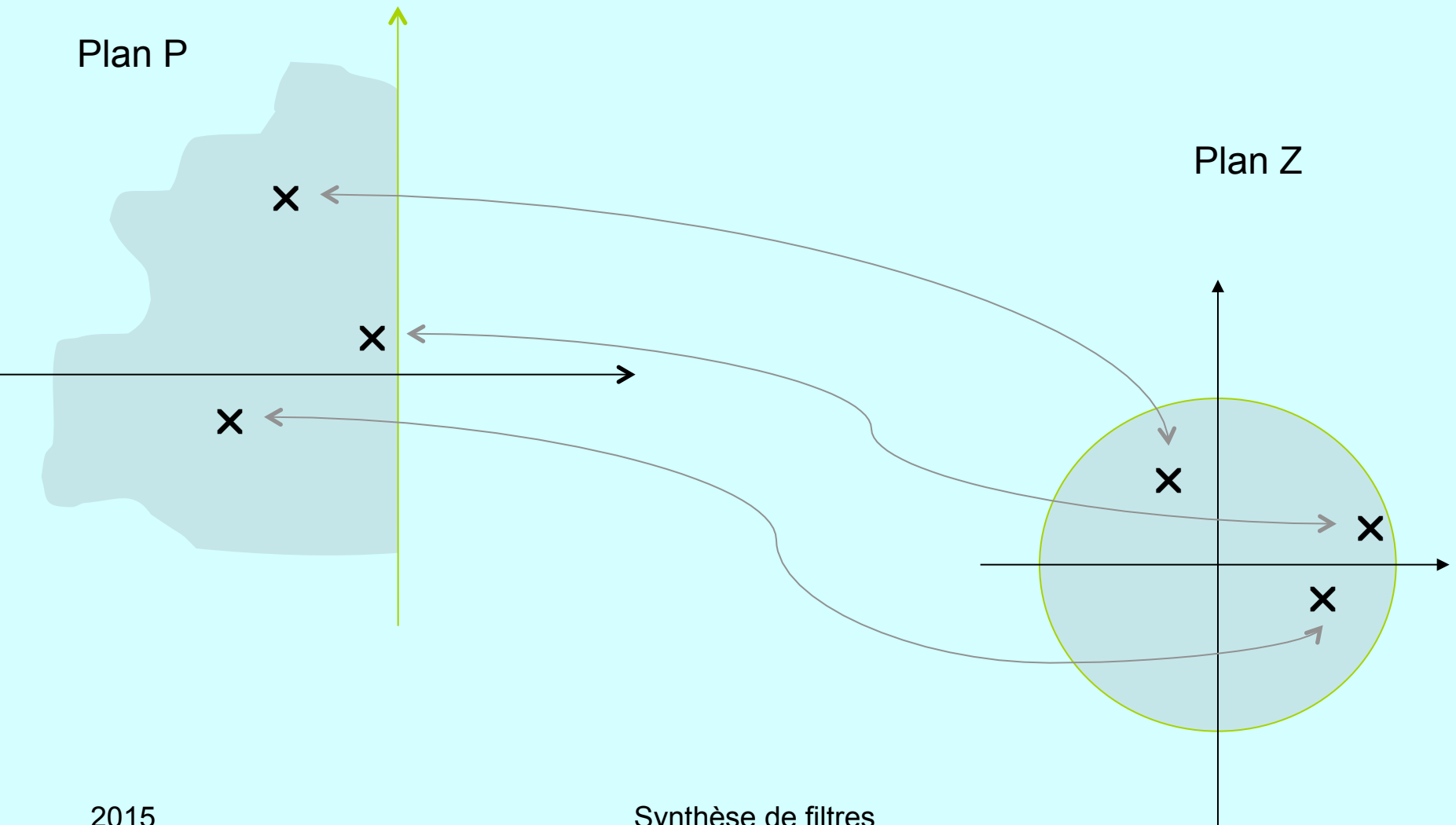
Définition et propriétés

- RII, conversion d'un filtre analogique en filtre numérique
- Laplace $H_a(p)$ \rightsquigarrow fonction de transfert en $H(z)$ en posant

$$p = k \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

- Transforme
 - le demi-plan gauche \rightsquigarrow intérieur du C_1 (conserve *la stabilité*)
 - la droite imaginaire $\rightsquigarrow C_1$ $p = j\Omega = jk \tan(\pi\nu)$
 - Ω tend vers l'infini $\rightsquigarrow \nu$ tend vers 0.5 (pas de repliement)

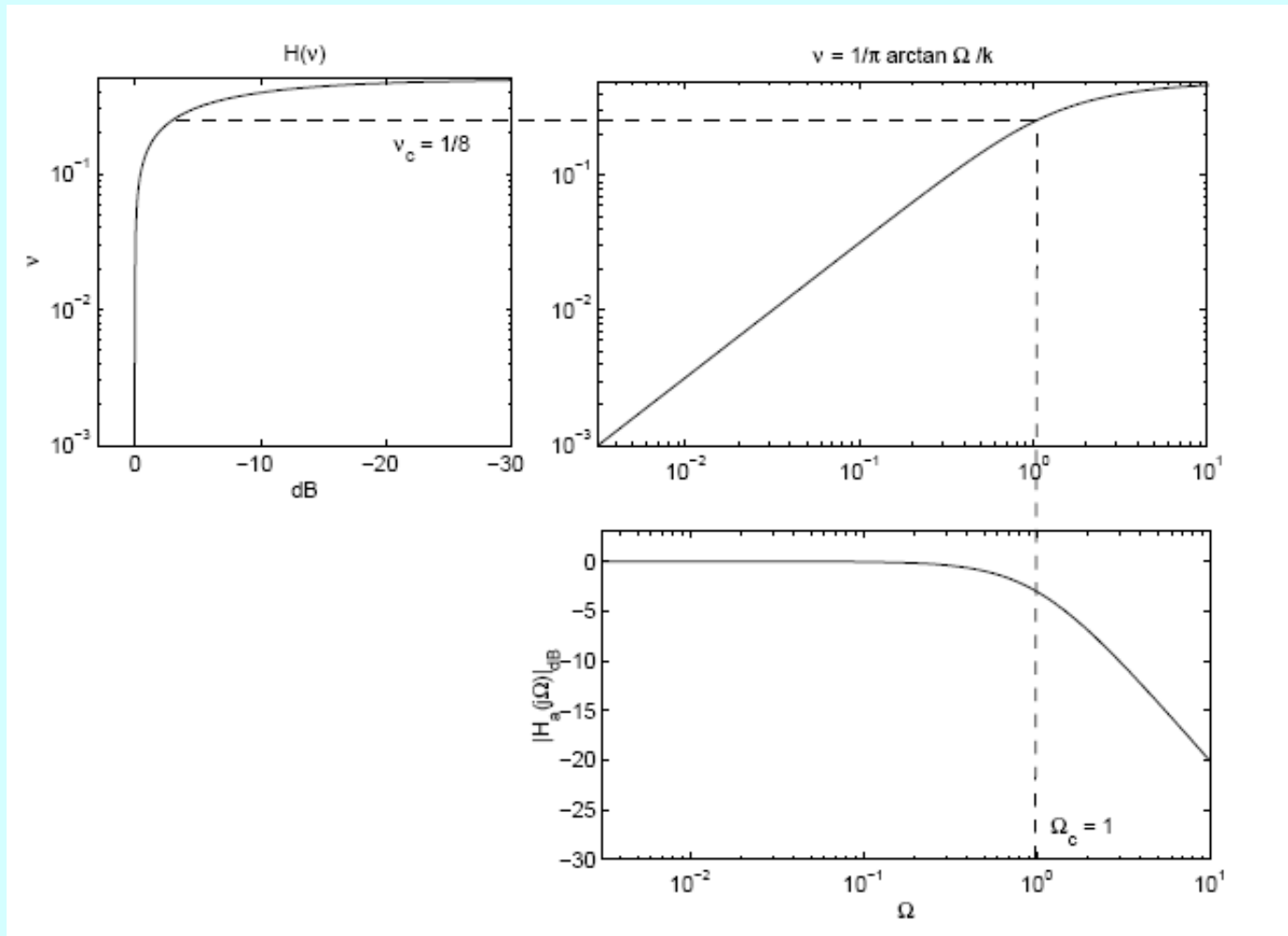
Transformation bilinéaire



Exemple du passe bas du premier ordre

- fonction de transfert du type $H_a(p) = \frac{1}{1 + \tau p}$
- soit $\Omega_c = 1/\tau$.
- Ex: $F_e = 8000$ Hz, $f_c = 1000$ Hz
 - conduit à choisir la fréquence de coupure du filtre numérique !
- on peut par exemple prendre $\Omega_c = 1$
- conduit à $k = \Omega_c (\tan \pi \nu_c)^{-1}$
- calcul final $H(z) = H_a\left(k \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}\right) = \frac{1}{(k + 1)} \frac{1 + z^{-1}}{1 + \frac{1-k}{1+k} z^{-1}}$

Exemple du passe bas du premier ordre



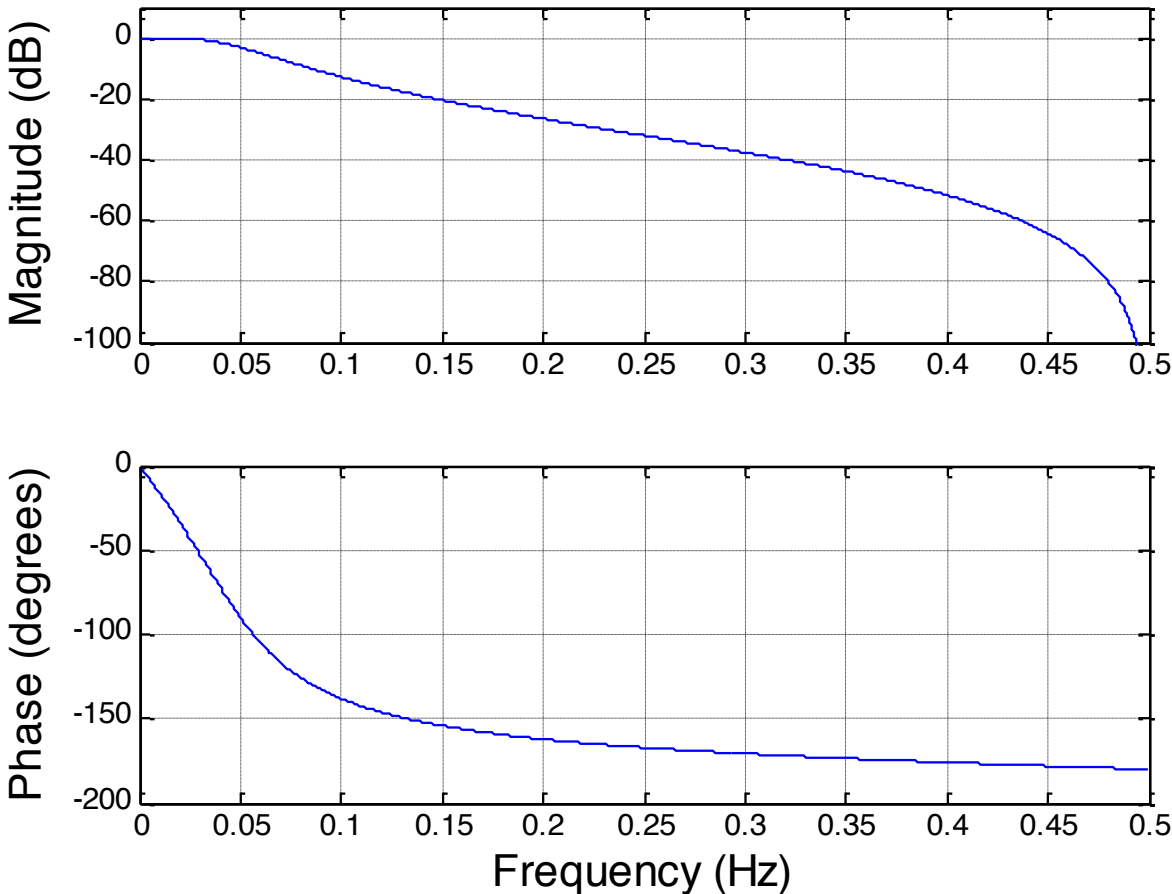
Exemple : maximalement plat en $\Omega = 0$

filtre de Butterworth

- Réponse en fréquence $|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega/\Omega_c)^{2N}}$
- $2N-1$ dérivées nulles en 0

Exemple : maximale plat en $\Omega = 0$

- R
- 2/



Exemple : filtres à ondulations constante

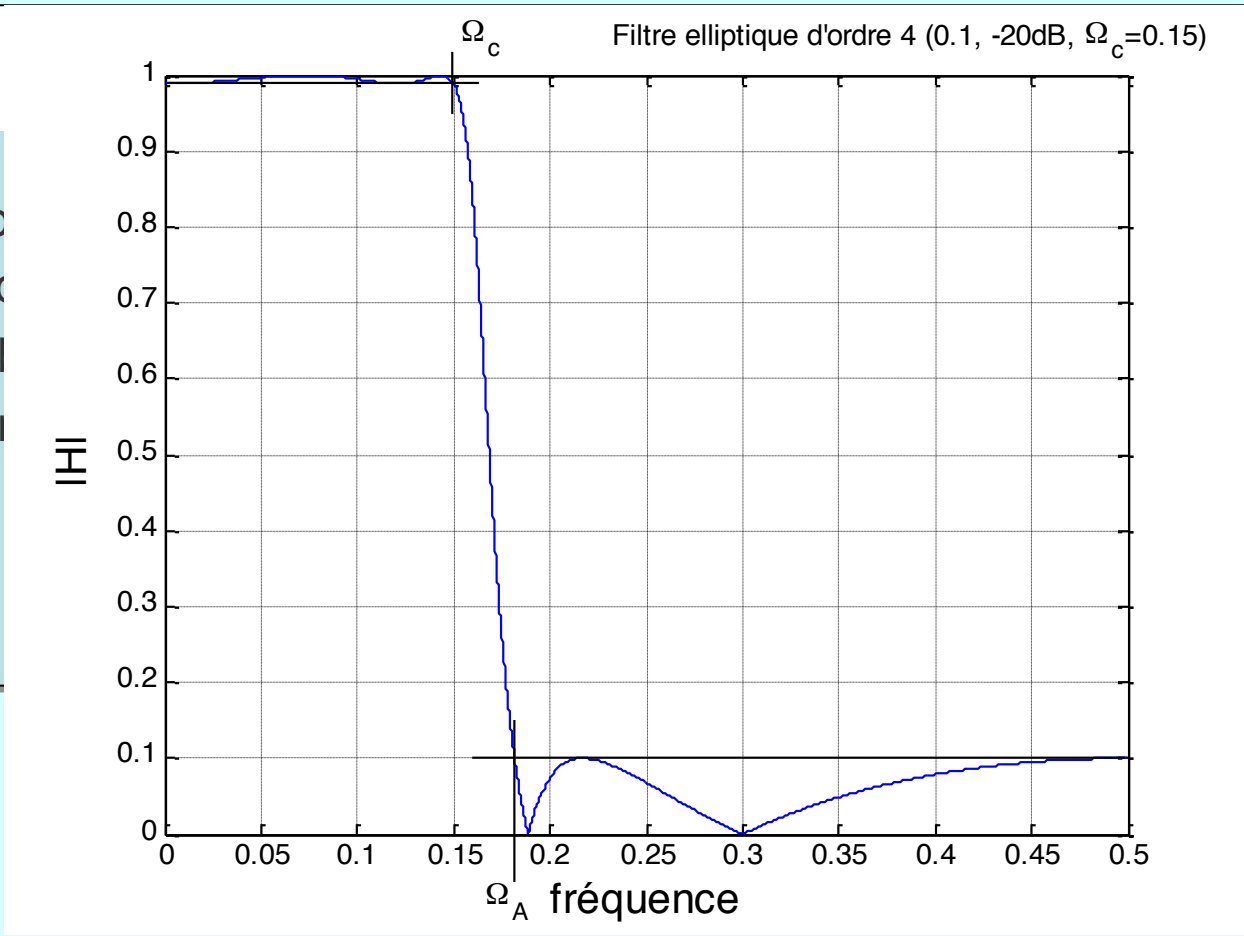
Filtres elliptiques

- forme particulière du gain faisant intervenir des fonctions elliptiques
- condition sur les fréquences de transition : $\Omega_C \Omega_A = 1$
- obtenue itérativement à partir des données initiales ν_C et ν_A
- ondulations constantes en bandes passante et atténuée

Exemple : filtres à ondulations constante

- fo
- Co
- Ol
- Ol

ptiques



Pause évocative



Synthèse des filtres à RIF

Filtres RIF à phase linéaire

- intérêt majeur des RIF : peuvent avoir une phase exactement linéaire
- *Définition*
$$H(e^{j2\pi\nu}) = e^{j2\pi(\beta-\alpha\nu)} H_R(\nu),$$
$$H_R(\nu) \in \mathbb{R} \forall \nu, \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in [0 \ 0.5]$$
- *propriété* : si le support fréquentiel du signal d'entrée est dans la bande passante (avec $H_R(\nu)=c$ dans la BP), alors ■

$$y(n) = dx_a(n - \alpha)$$

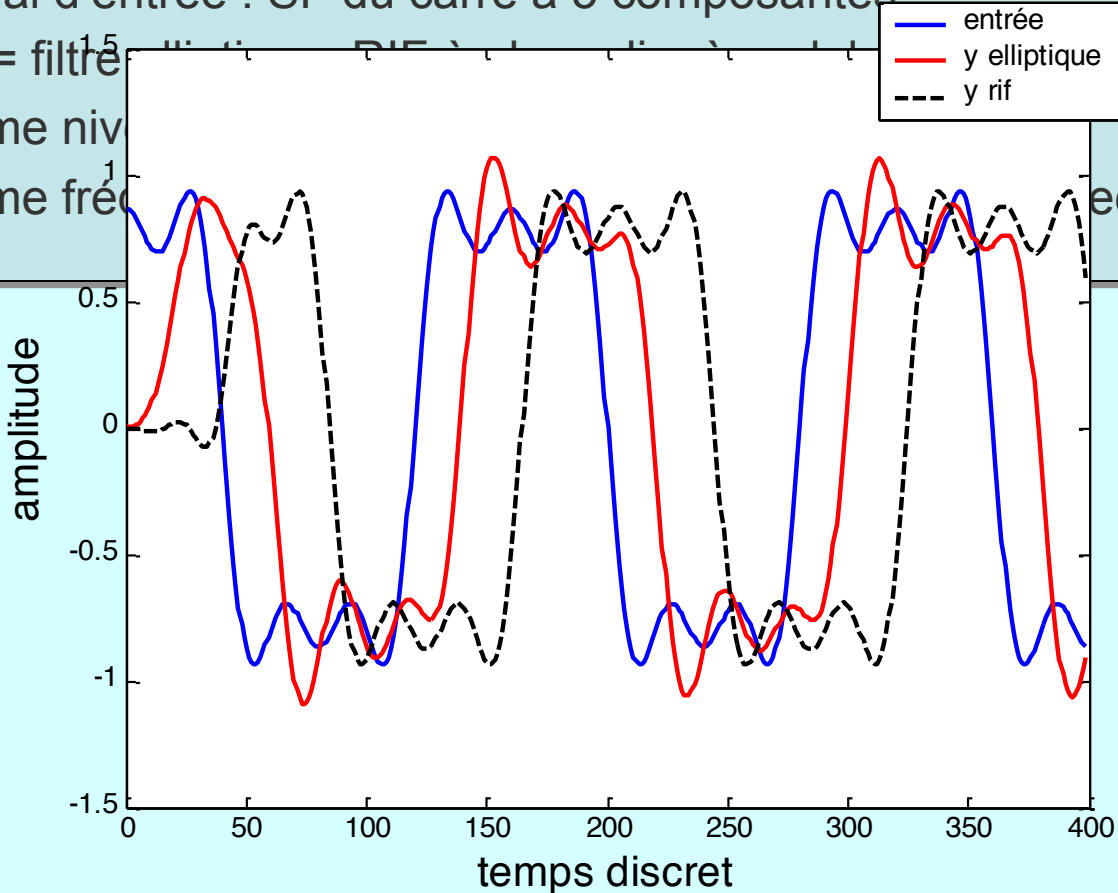
où $x_a(t)$ est la reconstruction parfaite analogique à partir des échantillons $x(n)$ à la cadence 1.

Exemple IIR (phase NL) vs FIR à phase lin.

- signal d'entrée : SF du carré à 3 composantes
- IIR = filtre elliptique, RIF à phase lin. à ondulation constantes
- même niveaux d'ondulation dans les bp et ba
- même fréquences de coupure, > fréq. supérieure du spectre d'entrée

Exemple IIR (phase NL) vs FIR à phase lin.

- signal d'entrée : SF du carré à 3 composantes
- IIR = filtre elliptique
- même niveau
- même fréquence



Symétrie de la réponse impulsionnelle

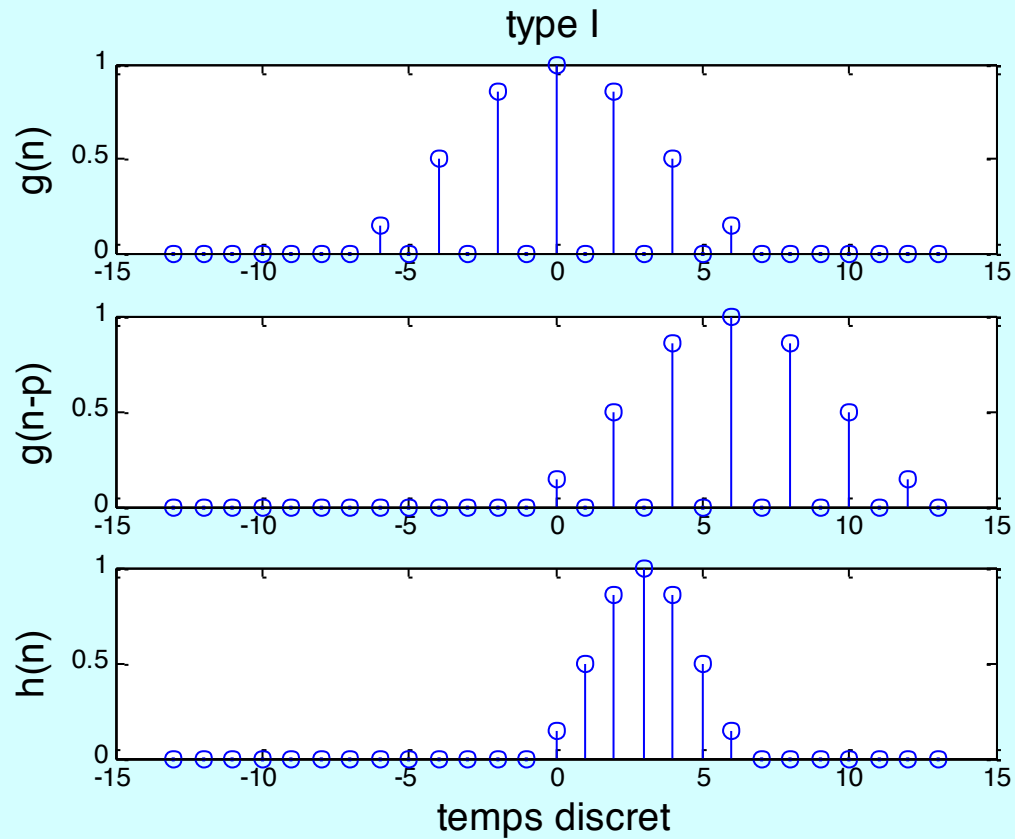
- on considère un filtre de RI $h(n)$ causal, réel, à phase linéaire. Montrer que α est nécessairement un demi-entier, $\alpha = p/2$ $p \in \mathbf{Z}$
- en déduire que $H_R(\nu)$ est au moins périodique de période 2.
- Montrer que $d = e^{j2\pi\beta}$ vaut 1 ou j .
- On pose $G(e^{j2\pi\nu}) = H_R(2\nu)$. Etudier les symétries possibles pour $g(n)$. Montrer la relation

$$H(z^2) = d z^{-p} G(z)$$

- interpréter le résultat en terme de suréchantillonnage. En déduire la valeur de p en fonction de la longueur N de la RI (un croquis peut aider).

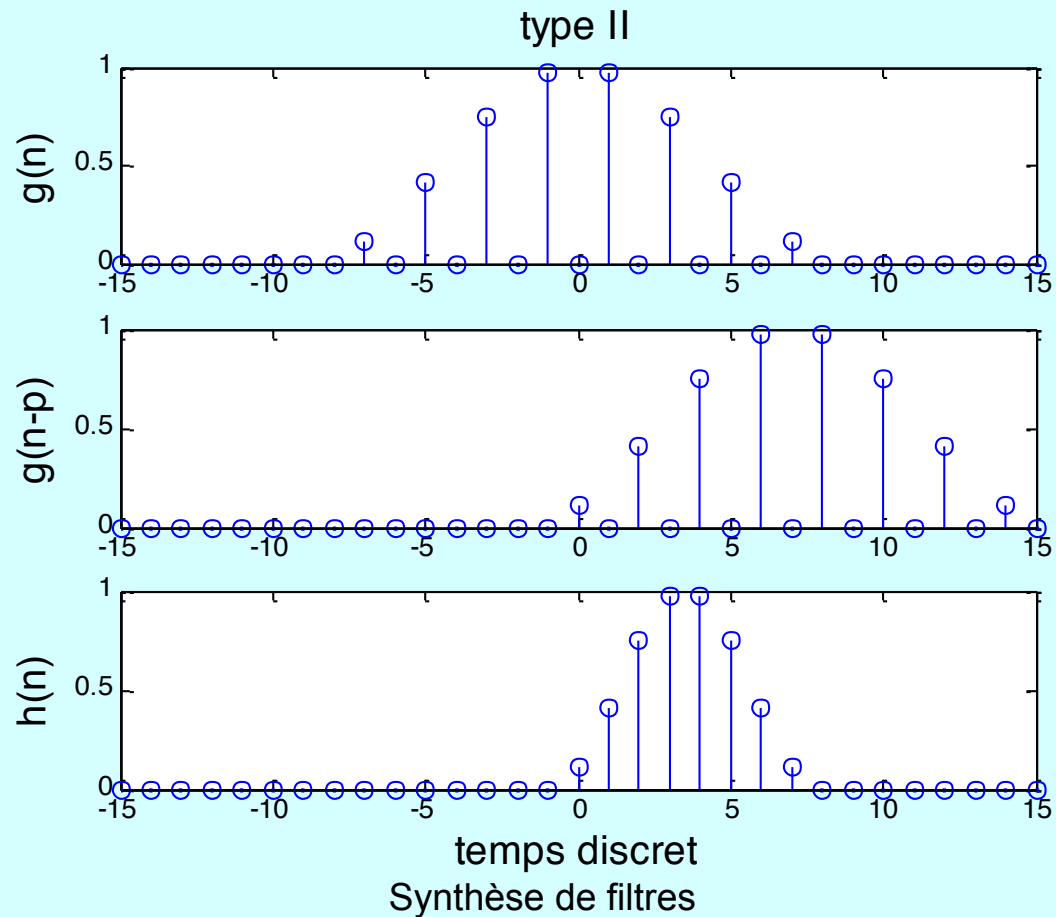
Cas longueur impaire, α entier

- si $d=1$: G est paire, réelle $\rightarrow g$ est paire et réelle.



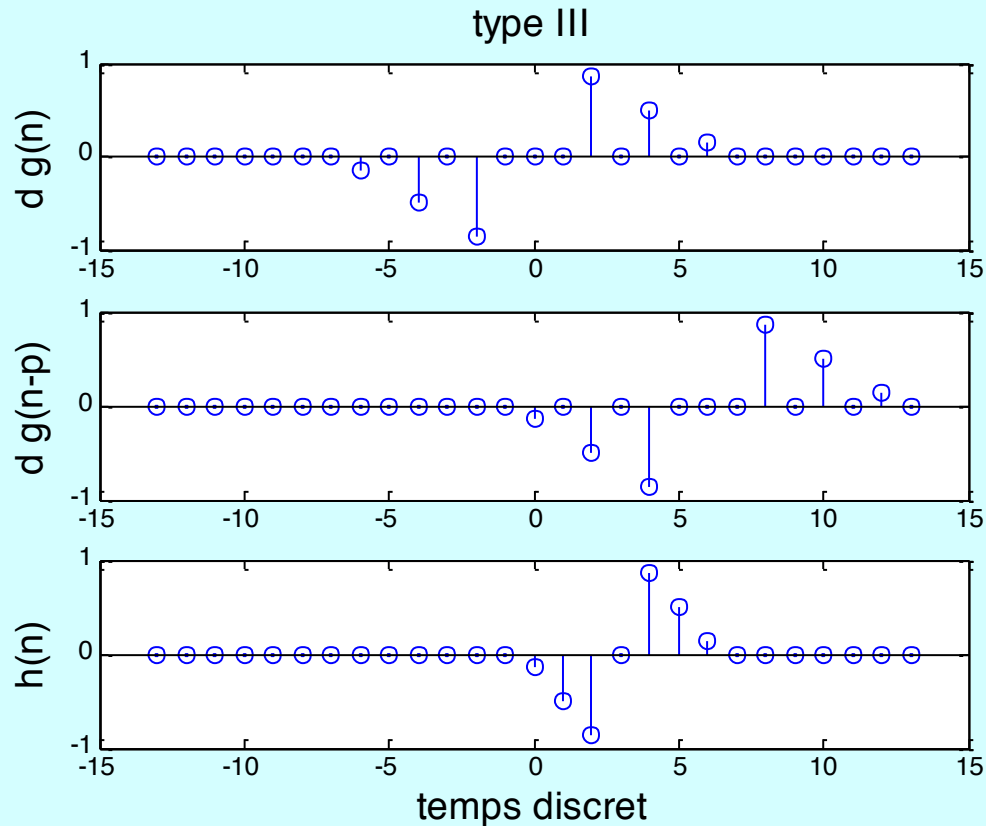
Cas longueur paire, α demi-entier

- si $d=1$: G est paire, réelle $\rightarrow g$ est paire et réelle.



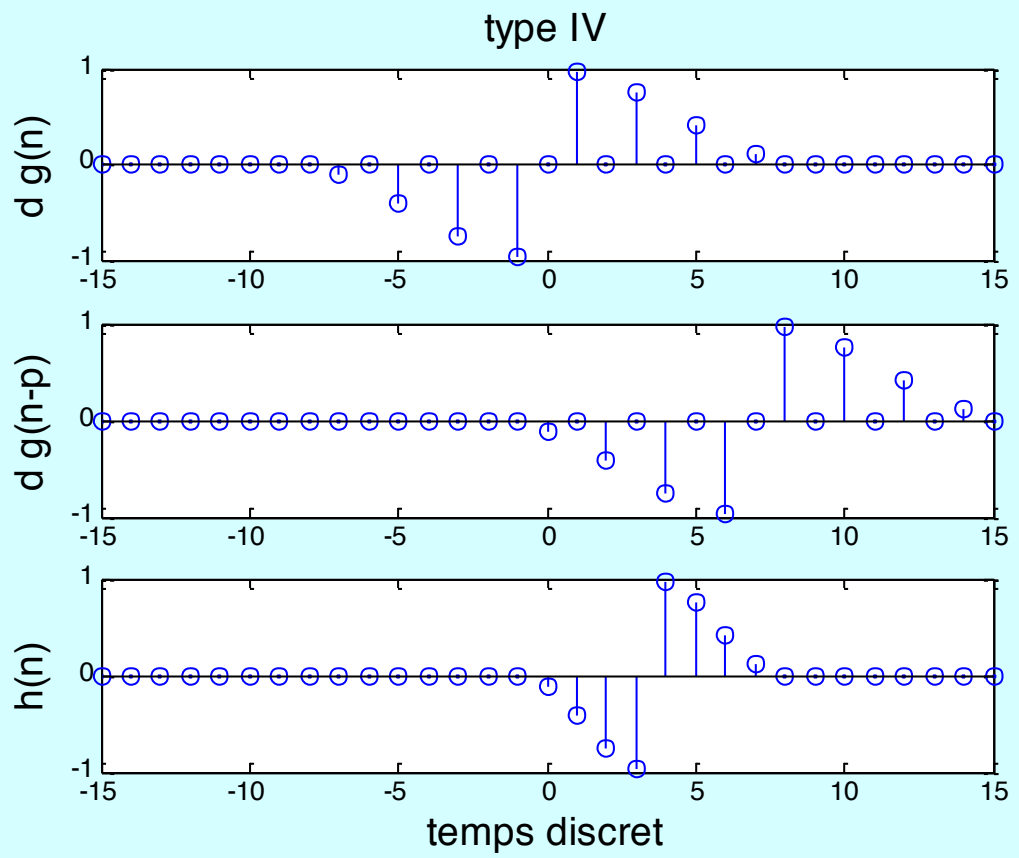
Cas longueur impaire, α entier

- si $d=j$: G est impaire, réelle $\rightarrow g$ est impaire et imaginaire.

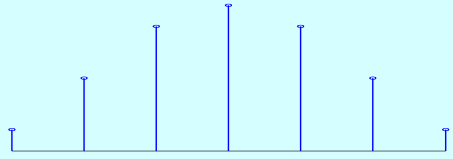
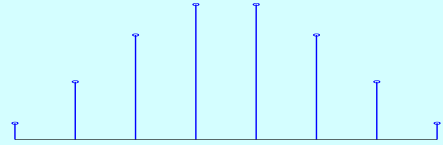
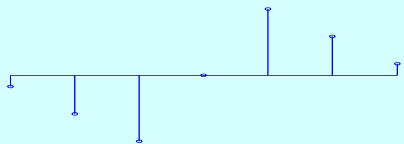
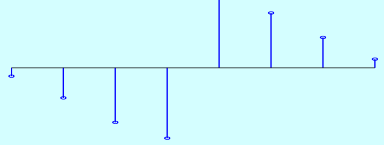


Cas longueur paire, α demi-entier

- si $d=j$: G est impaire, réelle $\rightarrow g$ est impaire et imaginaire.



En résumé

<p>Type I N impair symétrique</p>		<p>-</p>	<p>Passe-bas Passe-Haut Passe-Bande</p>
<p>Type II N pair symétrique</p>		<p>$H(-1) = 0$</p>	<p>Passe-bas, Passe-bande</p>
<p>Type III N impair anti-sym.</p>		<p>$H(0) =$ $H(-1) = 0$</p>	<p>Différentiateur, Transformateur de Hilbert, Passe-bande</p>
<p>Type IV N pair anti-sym.</p>		<p>$H(0) = 0$</p>	<p>Différentiateur, Transformateur de Hilbert, Passe Haut</p>

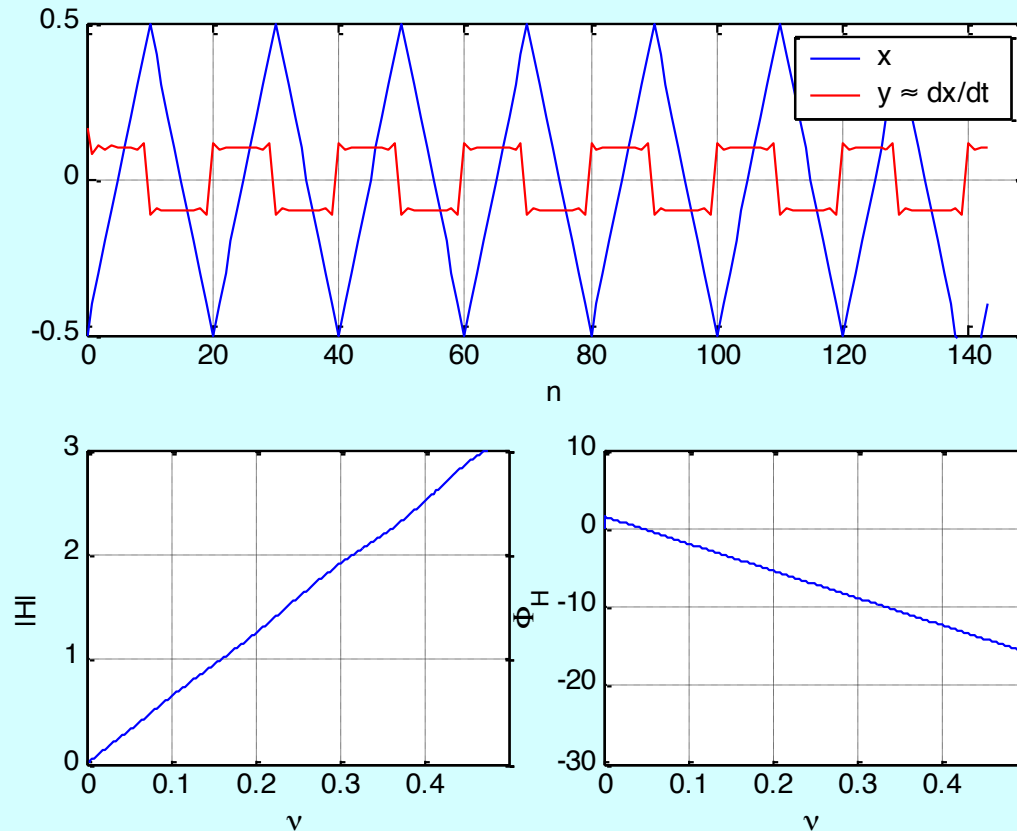
Filtres spéciaux

- lié au facteur j dans la réponse en fréquence des types III et IV.
- *Différentiateur* : réalise une approximation de l'opérateur différentiel en temps, dans le domaine fréquentiel :

$$H(e^{j2\pi\nu}) = j2\pi\nu F_e$$

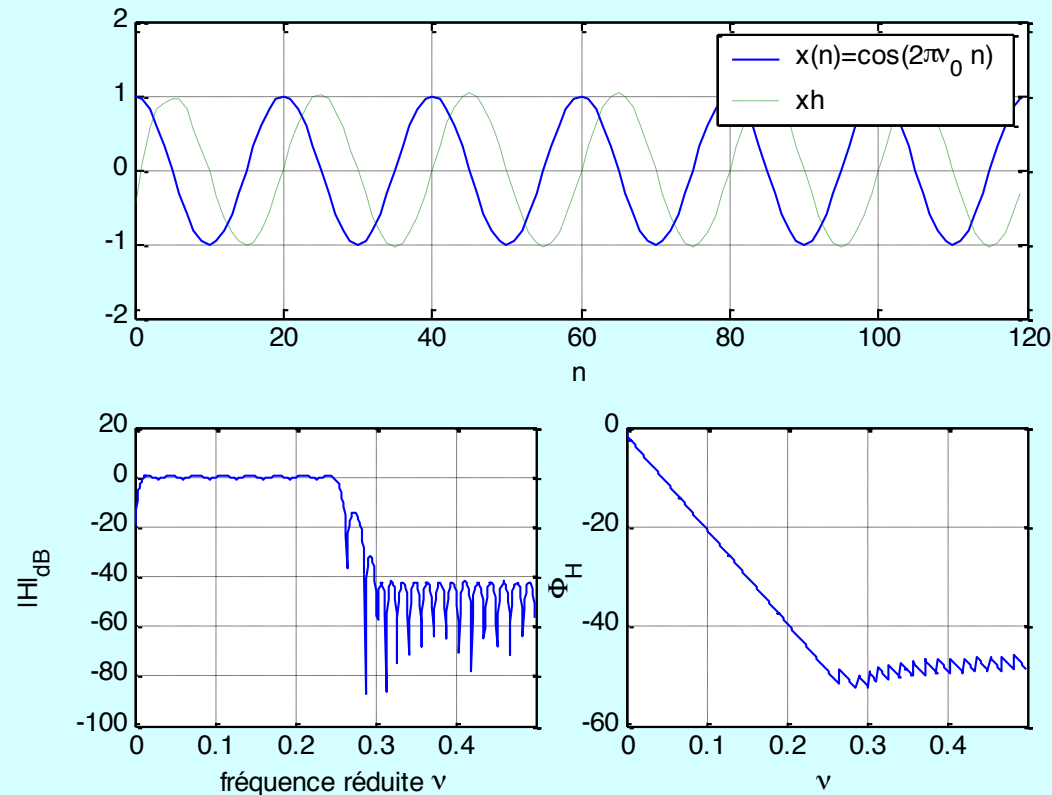
- *Transformateur de Hilbert*. Soit H la réponse en fréquence du filtre linéaire tel que
 - $H: x(n) \rightarrow x_h(n)$
 - $H: \cos(2\pi\nu_0 n) \rightarrow \sin(2\pi\nu_0 n), \forall \nu_0 \in [-0.5 \ 0.5]$
- Déterminer la fonction $H(e^{j2\pi\nu})$ pour $\nu \in]-0.5 \ 0[\cup]0 \ 0.5[$. Préciser ensuite sa valeur aux points 0 et 0.5
- En déduire l'intérêt présenté par les types III et IV pour réaliser le filtre H .
- *Signal analytique*. Soit le filtre $H_a: x(n) \rightarrow x_a(n) = x(n) + j x_h(n)$. $x_a(n)$ est le *signal analytique* associé au signal réel $x(n)$.

Différentiateur : exemple



```
h = firpm(11, [0 0.49]*2, [0 2*pi*.49], 'd');
```

Transformateur de Hilbert : exemple



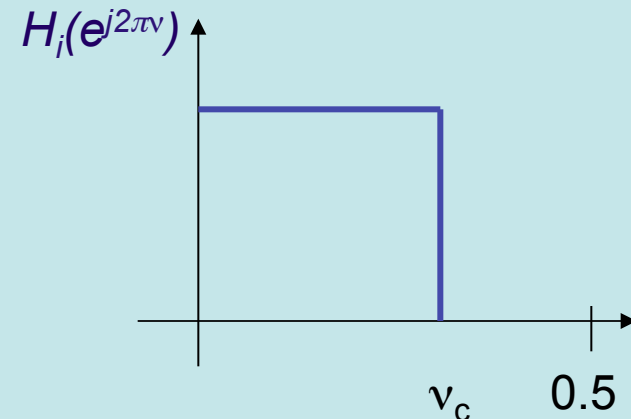
```
h = firpm(60, 2* [.01 .25 .3 .5], [1 1 0 0], [1 10], 'h');
```

Synthèse : méthodes pour les RIF

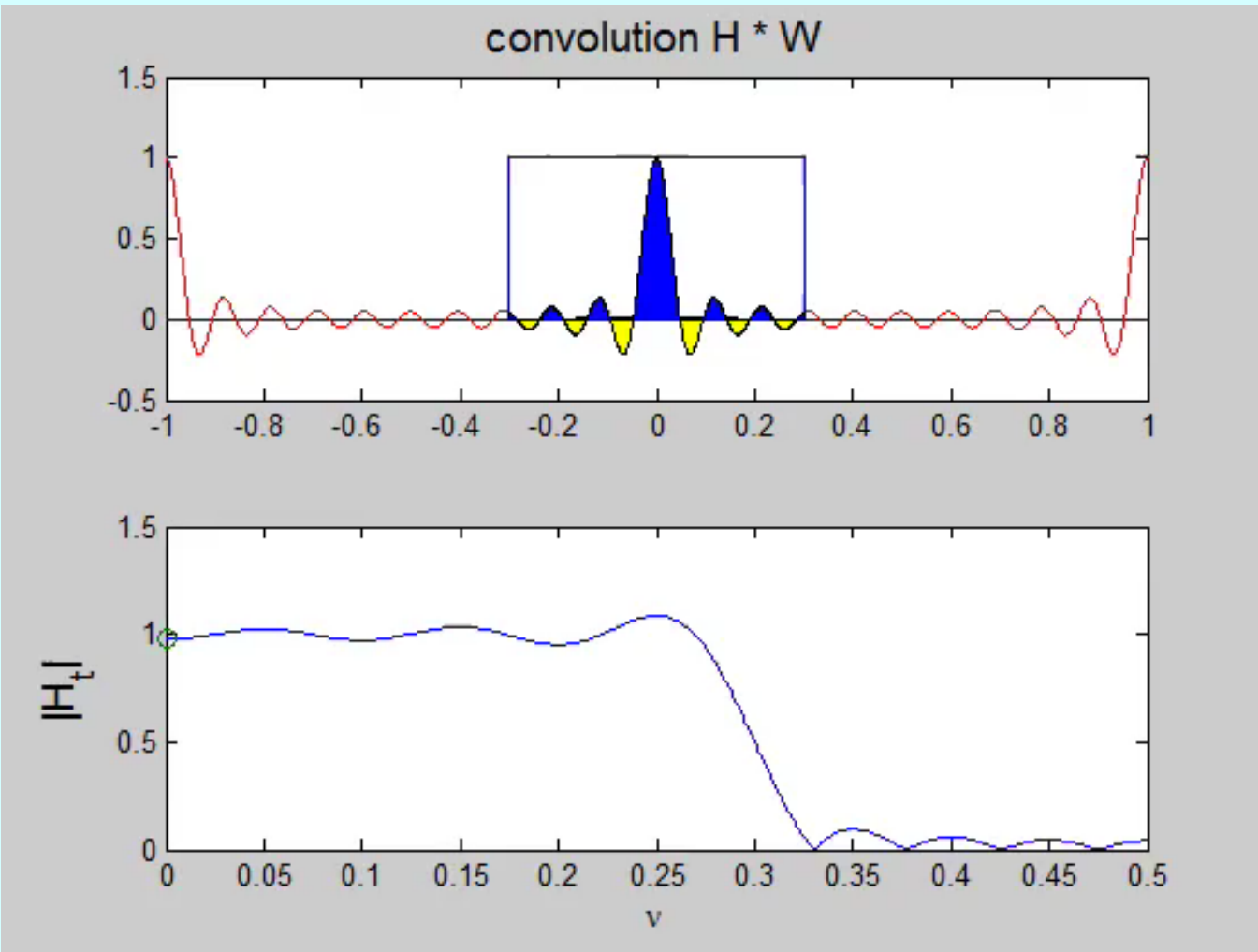
- méthode de la fenêtre : permet de comprendre le compromis à atteindre entre le niveau d'ondulation et la largeur de transition
- méthode d'optimisation sous contrainte, notion de « filtre propre »
- méthode d'optimisation par minimisation de la norme L_∞ d'une fonction d'erreur pondérée.

Synthèse à fenêtre

- Algorithme simple :
 - inversion de $H_{idéal}$
 - troncature symétrique \equiv multiplication par une fenêtre finie
 - décalage pour rendre le filtre causal
- Donne nécessairement type I ou III (N impair)
- Exemple :
 - soit $H_i(e^{j2\pi v})$ ci-contre
 - calculer $h_i(n)$
 - en déduire $h(n)$ par troncature rectangulaire de longueur $2P-1$, $P = 4$.
 - Représenter $H(e^{j2\pi v})$



Synthèse à fenêtre : Gibbs et transition



Optimisation de la synthèse à Fenêtre

Fenêtre paramétrable de Kaiser

- quelques pb liés à la méthode à fenêtre
 - ajuster indépendamment le niveau d'ondulation en bande coupée et la largeur de transition
 - le niveau d'ondulation est le même en bande coupée et passante
- fenêtre de Kaiser
 - dépend d'un paramètre β qui ajuste δ_2 en bande atténuée
 - on joue ensuite sur la longueur du filtre pour la bande de transition
 - longueur $N = 2M+1$, I_0 : fonction de Bessel modifiée de 1ere espèce

$$w(n) = \frac{I_0(\beta\sqrt{1 - n^2/M^2})}{I_0(\beta)}$$

Optimiser la fenêtre sous contrainte

Prolates sphéroïdes

- on cherche à maximiser l'énergie en bande passante sous contrainte unitaire, *i.e.*
 - on cherche $\operatorname{argmax}_h \int_{-\nu_c}^{\nu_c} |H(e^{j2\pi\nu})|^2 d\nu$
 - sous contrainte $\int_{-0.5}^{0.5} |H(e^{j2\pi\nu})|^2 d\nu = 1$
 - montrer que ce pb peut se ramener à la maximisation de la forme quadratique

$$Q = \mathbf{h}^H \mathbf{R} \mathbf{h}, \quad \mathbf{R} = \int_{-\nu_c}^{\nu_c} \mathbf{e}(e^{j2\pi\nu}) \mathbf{e}^H(e^{j2\pi\nu}) d\nu$$

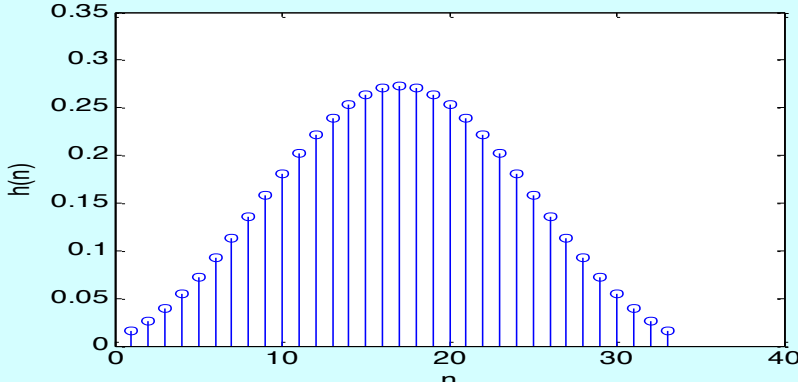
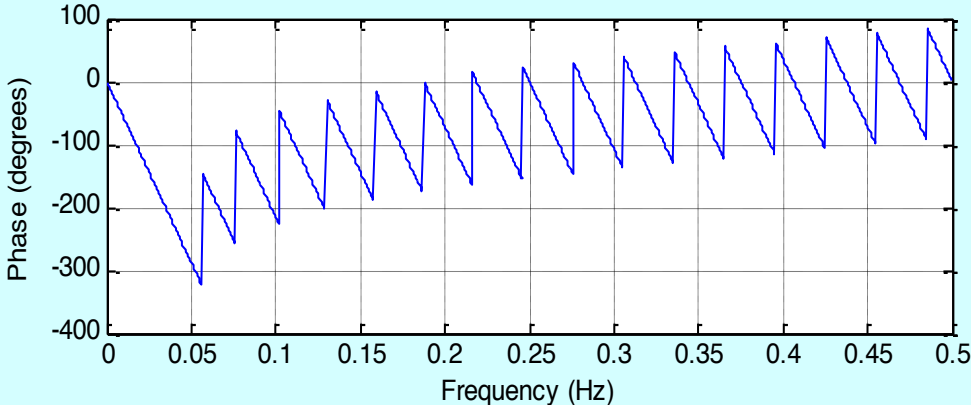
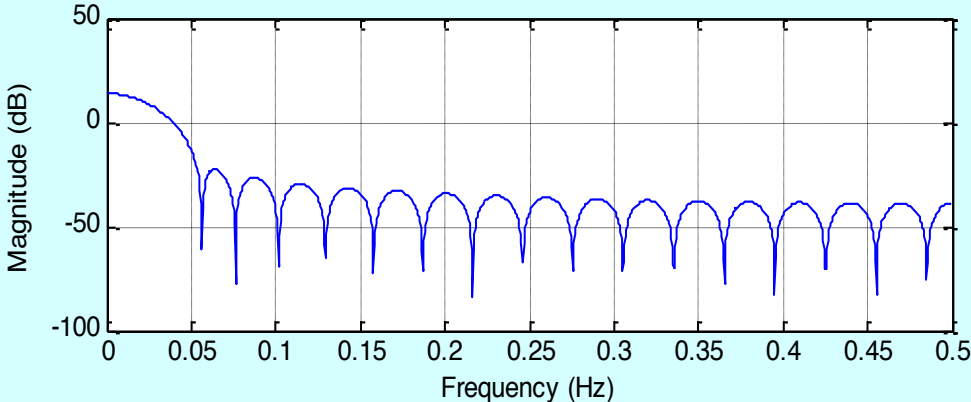
sous la contrainte $\mathbf{h}^H \mathbf{h} = 1$, avec $\mathbf{e}(z) = [1 \ z^{-1} \ \dots \ z^{-N+1}]^T$.

Optimiser la fenêtre sous contrainte

Prolates sphéroïdes et filtres propres

- terme général de \mathbf{R} : $r_{mn} = 2\nu_c \text{sinc}(2\nu_c(m - n))$
- définie positive (forcément)
- *algorithme de calcul*
 - 1. calcul de \mathbf{R}
 - 2. décomposition aux valeurs propres
 - 3. h = vecteur propre unitaire associé à la plus grande valeur propre
- extension : contrainte en minimisation d'erreur quadratique sur les différentes bandes → filtres propres.

Exemple



```
clear all
nu0 = 0.05; % freq de coupure
N = 33 ; % longueur du filtre
n = 0:N-1;

L1 = sincard(2*pi*nu0*n)
R = nu0*toeplitz(L1);
[V,lambda]=eig(R,'nobalance');
lambda = diag(lambda);
ind = find(lambda==max(lambda));

h = V(:,ind);
```

Méthodes itératives : principe

- rappel : la forme de la rf = $H(e^{j2\pi\nu}) = e^{-j2\pi\nu(\frac{N-1}{2})} H_R(\nu)$
- on cherche à minimiser *le maximum* d'une erreur pondérée

$$E(\nu) = W(\nu)(D(\nu) - H_R(\nu)), \nu \in B$$

- soit
$$h_m = \underset{h}{\text{Argmin}} \|E(\nu)\|_\infty,$$
$$\|E(\nu)\|_\infty = \max_B E(\nu).$$

illustration de l'erreur pondérée (Chebychev)

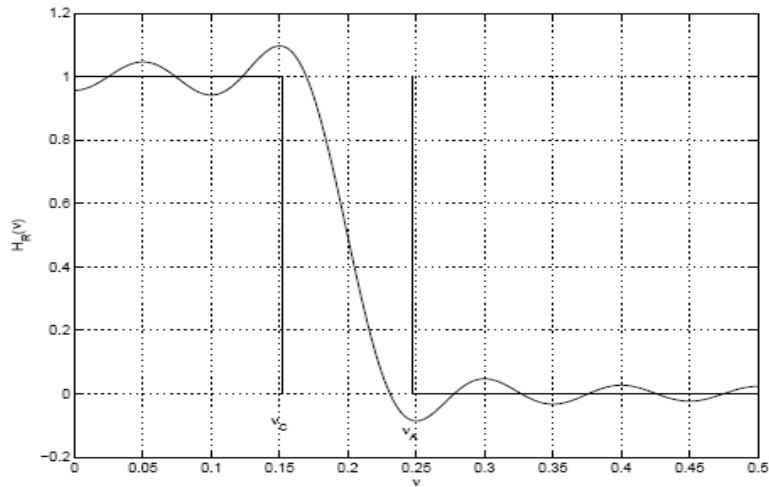


FIG. 22 – Réponse obtenue et réponse idéale d'un filtre passe bas

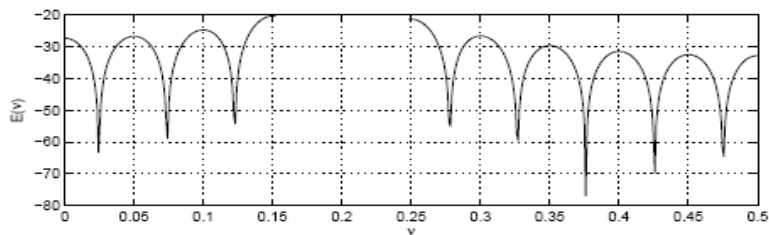


FIG. 23 – Erreur en dB dans le domaine B

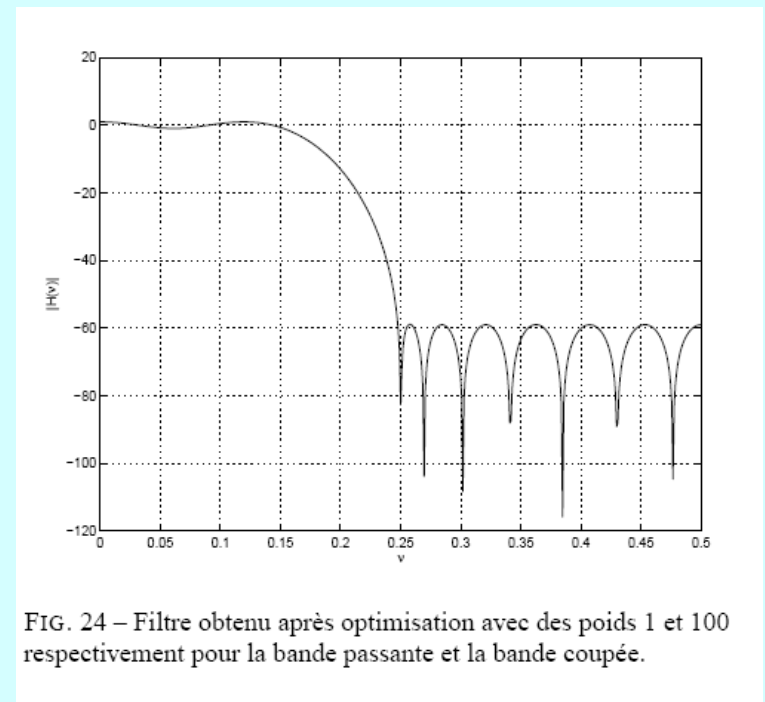


FIG. 24 – Filtre obtenu après optimisation avec des poids 1 et 100 respectivement pour la bande passante et la bande coupée.

algorithme d'échange (remez)

Sur un exemple de type I (N impair, symétrique)

- Montrer que la réponse zéro-phase s'écrit sous la forme

$$H_R(e^{i2\pi\nu}) = \sum_{n=0}^M a_n \cos 2\pi\nu n$$

- On en déduit qu'on peut encore l'écrire sous la forme d'un polynôme en $c(\nu) = \cos(2\pi\nu)$ soit :

$$H_R(e^{i2\pi\nu}) = \sum_{k=0}^M b_k c(\nu)^k$$

qui admet une dérivée = 0
en 0 et $M-1$ autres maxima

- algorithme d'échange :
 - 0: init : on répartit dans B les candidats au max en prenant les bords
 - 1: à l'aide d'une interpolation, on calcule les coeffs du polynome
 - 2: on recalcule les candidats comme les max du polynome
 - 3: retour à 1 jusqu'à convergence de l'erreur

algorithme d'échange (remez)

