Synthèse de filtres numériques

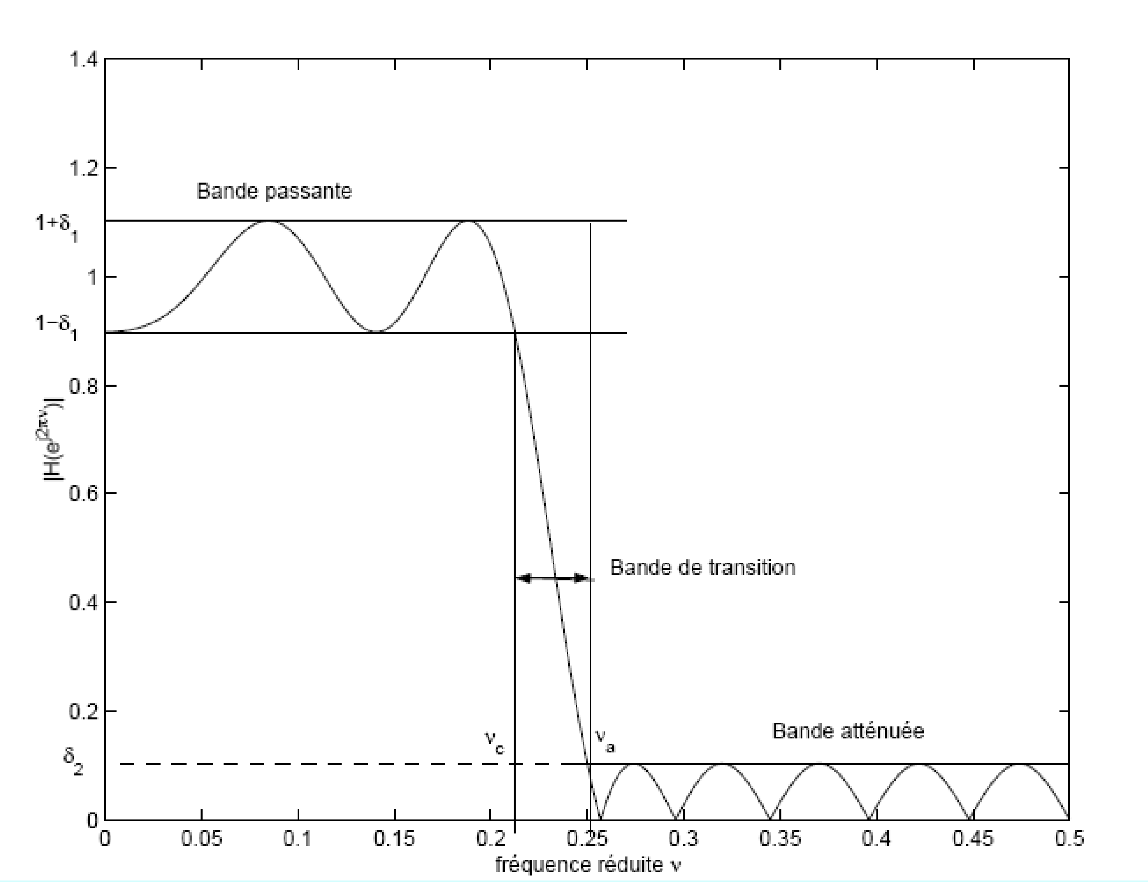
B. David
2015

Généralités
T. Bilinéaire
RIF à ϕ linéaire

Critères de choix

- RIF ou RII ?
- RII :
  - + : complexité, imitation des filtres analogiques
  - - : pb d'arrondis de calcul cumulatifs, sensibilité à la représentation finie des coefficients, phase non linéaire
- RIF :
  - + : phase exactement linéaire possible, garantie de stabilité, non cumulation des erreurs de calcul (non récursifs)
  - - : complexité (par ex. pour traduire des résonances ou pour assurer une bonne sélectivité)

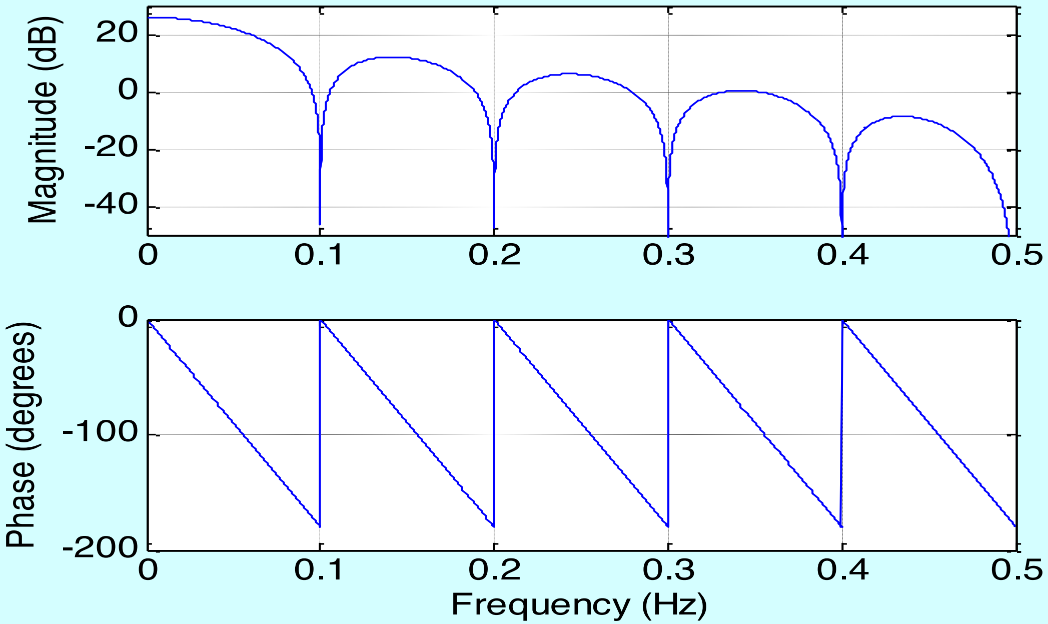
Spécifications d'un filtre numérique



construction empirique d'un filtre passe-bas IIR

- on suppose $H(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$
- pour construire *la bande atténuée*, on place des zéros en 0.1, 0.2... 0.5.

$$N(z) = K \prod_k (1 - z_k z^{-1})$$



<u>Code</u>

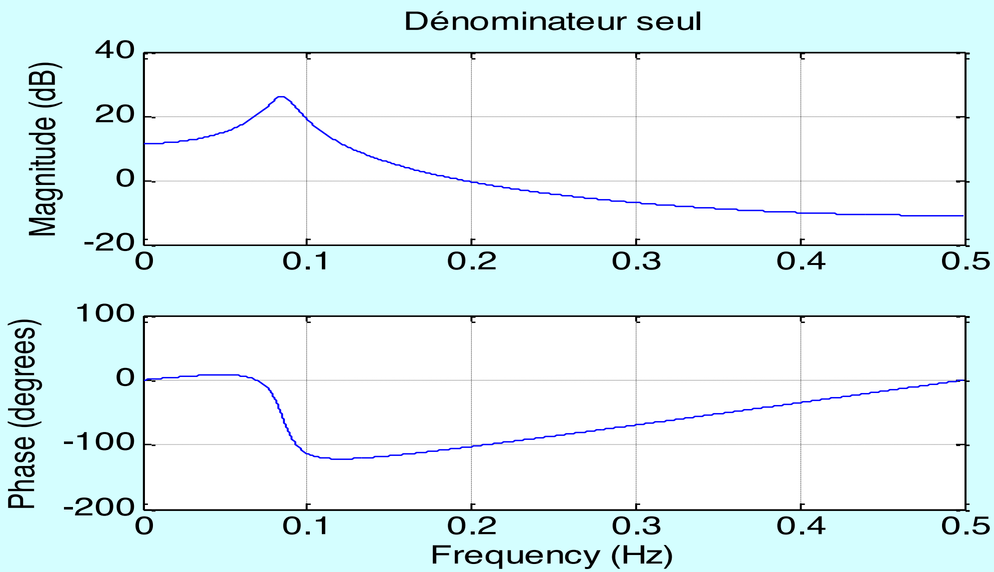
```
z = exp(j*2*pi*[0.1 .2
      .3 0.4 0.5]);
z = [z conj(z)];
N = poly(z);

freqz(N,1,4096,1)
```

construction empirique d’un filtre passe-bas IIR

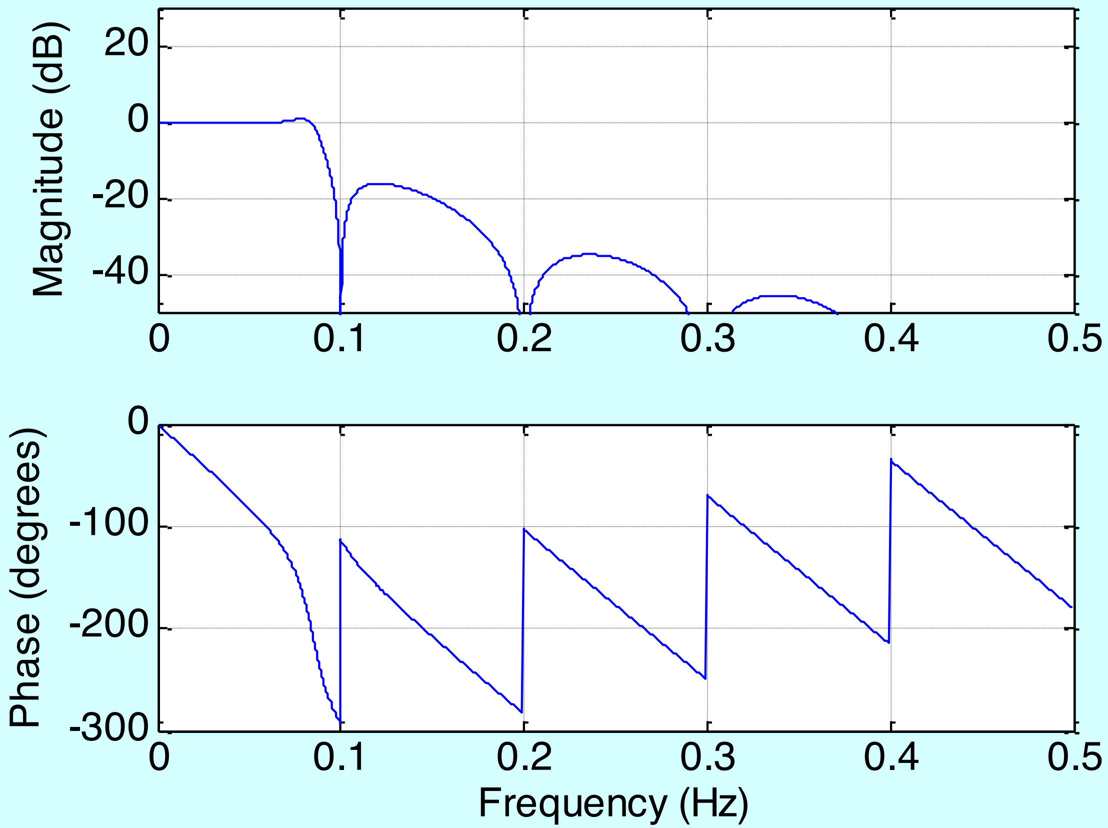
- le filtre n’est pas « plat » dans sa bande passante
- on cherche à compenser par le placement d’un pole tel que

$$D(z) = (1 - pz^{-1})(1 - p^{*}z^{-1})$$

$$|D(e^{j2\pi\nu})| \approx |N(e^{j2\pi\nu})|$$

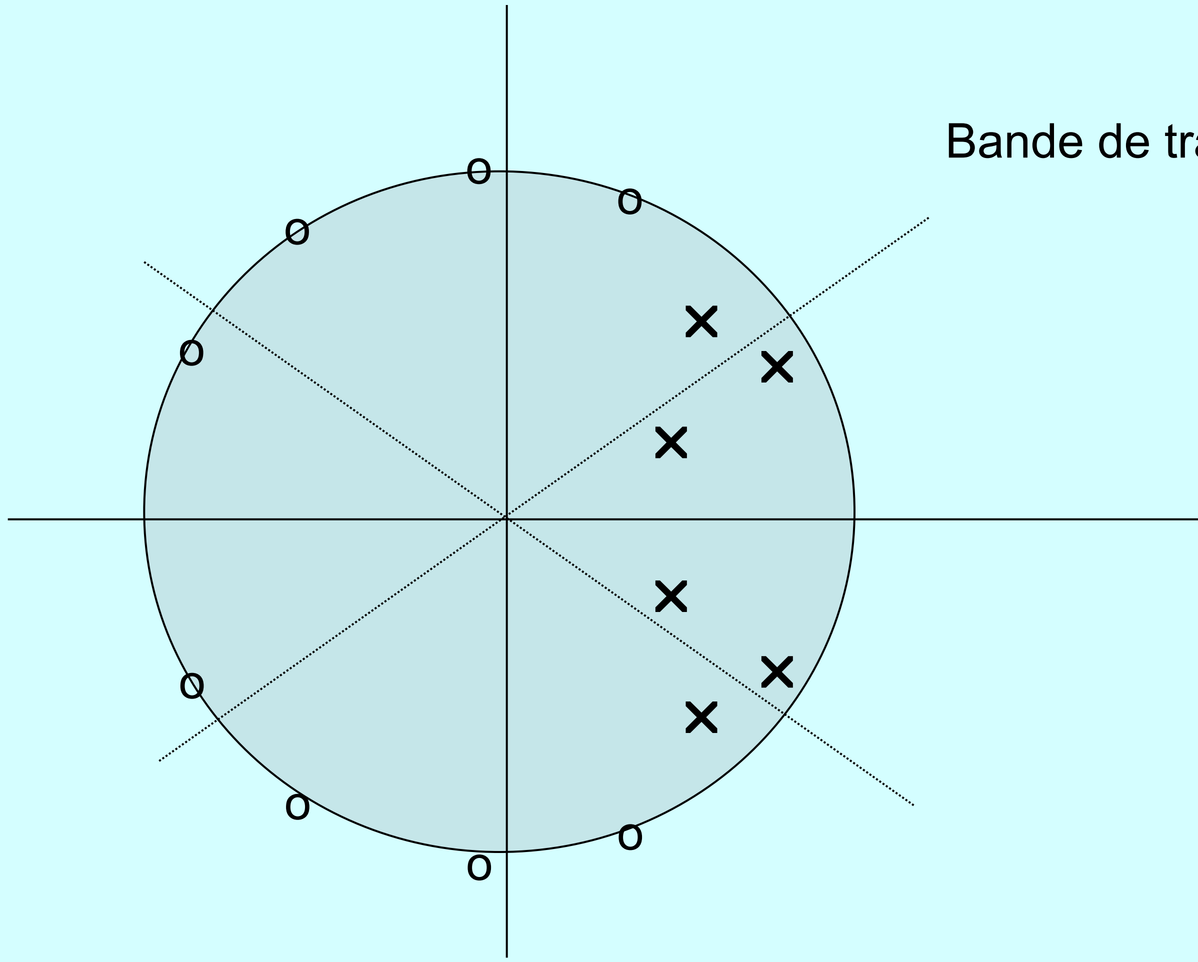


construction empirique d’un filtre passe-bas IIR



ici, $p = 0.95e^{j2\pi\, 0.085}$

diagramme poles-zeros typique



Transformation bilinéaire

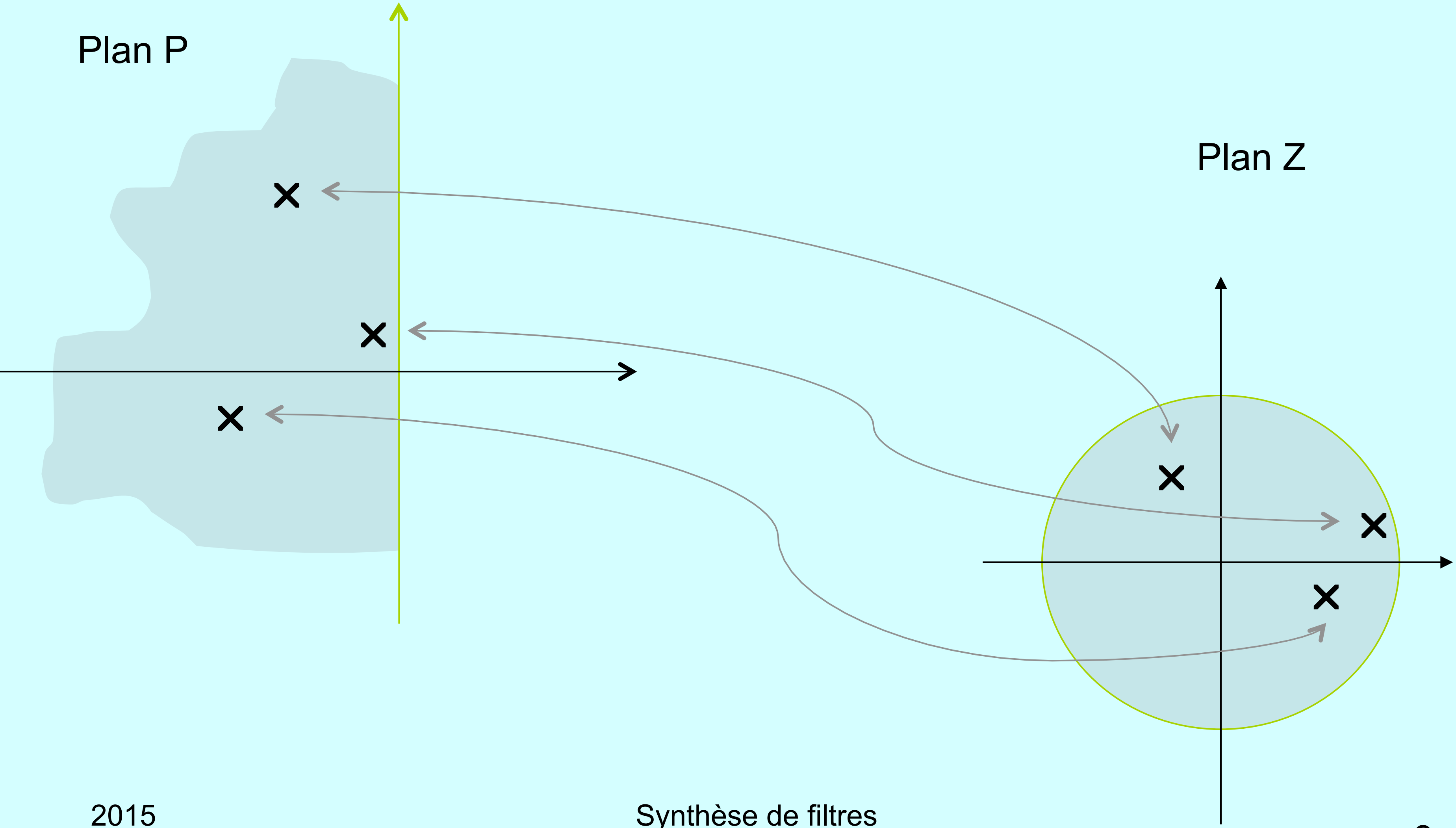
Définition et propriétés

- RII, conversion d'un filtre analogique en filtre numérique
- Laplace $H_a(p)$ ➠ fonction de transfert en $H(z)$ en posant

$$\boxed{p = k\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}}$$

- Transforme
  - le demi-plan gauche ➠ intérieur du C_1 (conserve *la stabilité*)
  - la droite imaginaire ➠ C_1 $\quad p = j\Omega = jk\tan(\pi\nu)$
  - Ω tend vers l'infini ➠ ν tend vers 0.5 (pas de repliement)

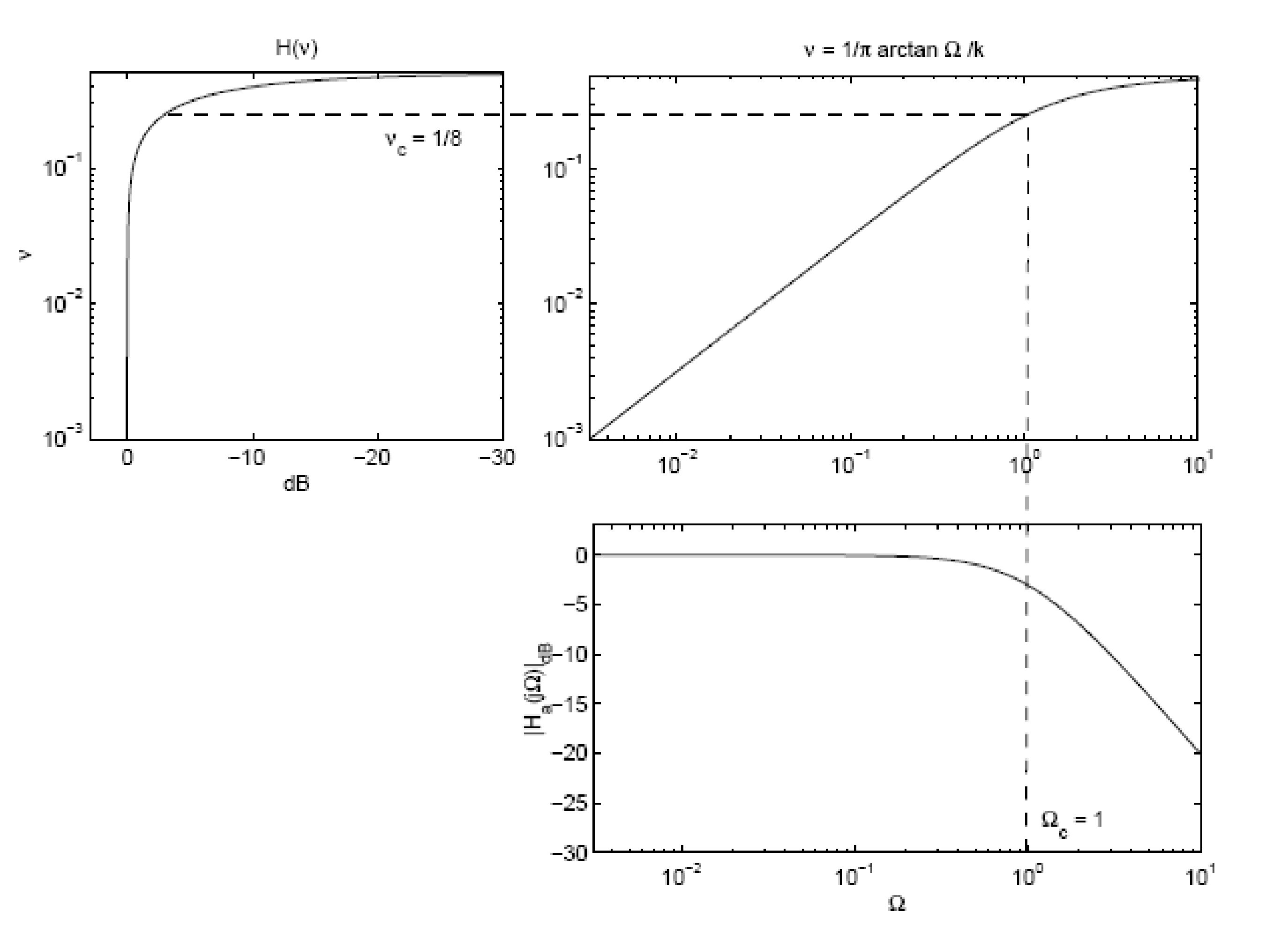
Transformation bilinéaire



Exemple du passe bas du premier ordre

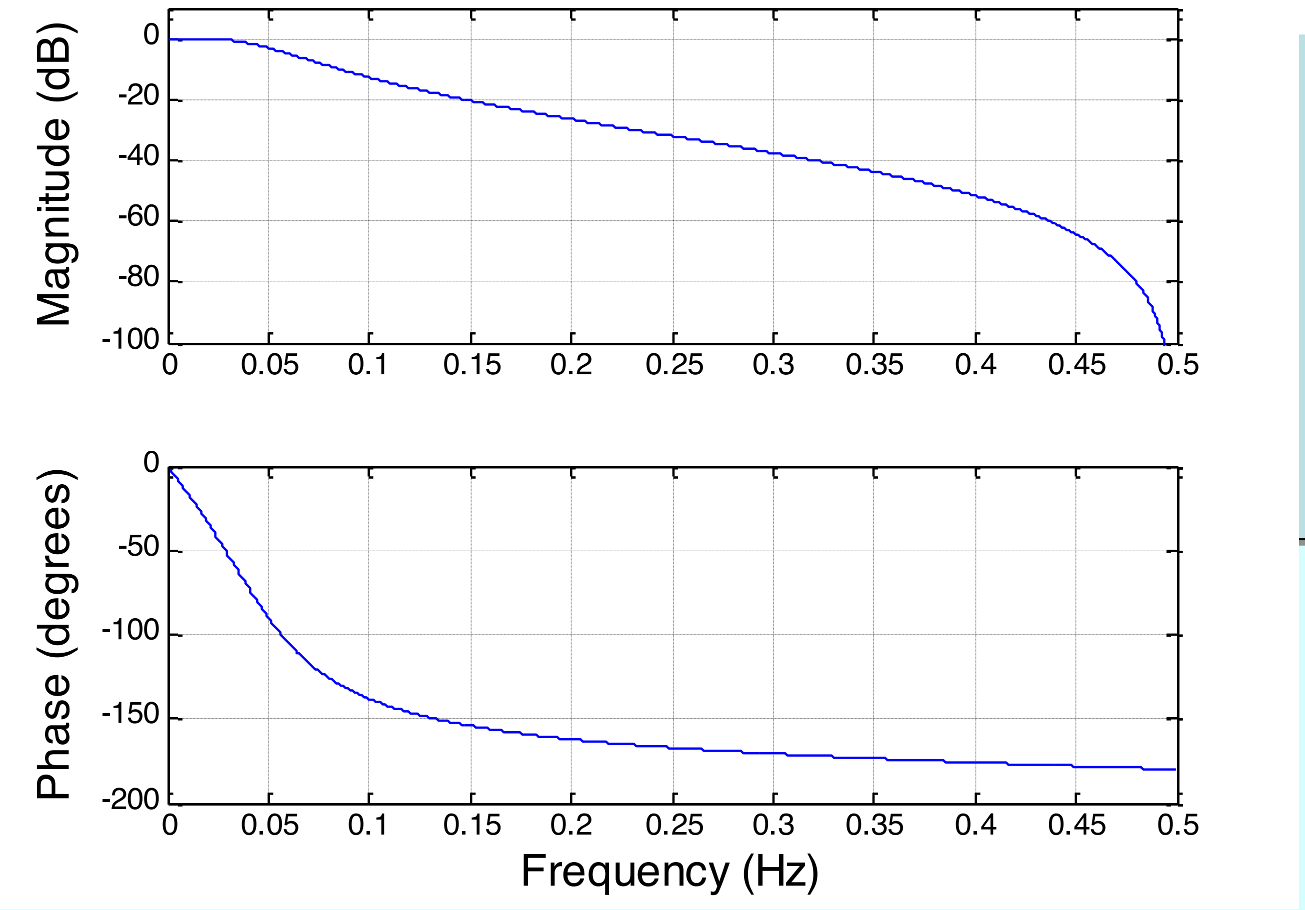
- fonction de transfert du type $$H_a(p) = \frac{1}{1+\tau p}$$
- soit $\Omega_c = 1/\tau$.
- Ex: F_e = 8000 Hz, f_c = 1000 Hz
  - conduit à choisir la fréquence de coupure du filtre numérique !
- on peut par exemple prendre $\Omega_c = 1$
- conduit à $k = \Omega_c(\tan \pi\nu_c)^{-1}$
- calcul final $$H(z) = H_a\left(k\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) = \frac{1}{(k+1)}\frac{1+z^{-1}}{1+\frac{1-k}{1+k}z^{-1}}$$

Exemple du passe bas du premier ordre



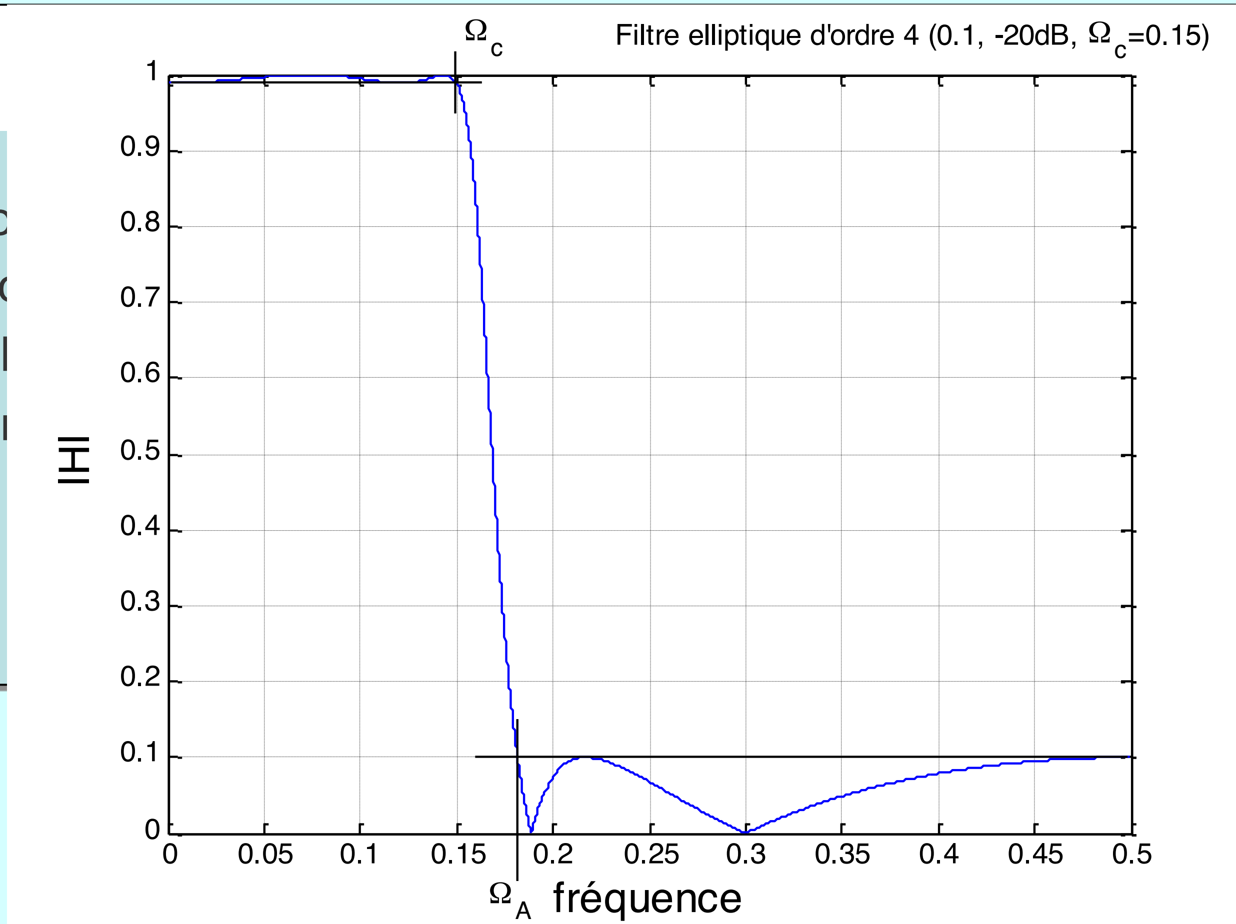
Exemple : maximalement plat en $\Omega = 0$

- R
- *2*



Exemple : filtres à ondulations constante

- fc ptiques
- cc
- ol
- or



Synthèse des filtres à RIF

Filtres RIF à phase linéaire

- intérêt majeur des RIF : peuvent avoir une phase exactement linéaire
- *Définition*

$$H(e^{j2\pi\nu}) = e^{j2\pi(\beta-\alpha\nu)} H_R(\nu),$$
$$H_R(\nu) \in \mathbb{R}\ \forall\nu,\ \alpha \in \mathbb{R},\ \beta \in [0\ 0.5]$$

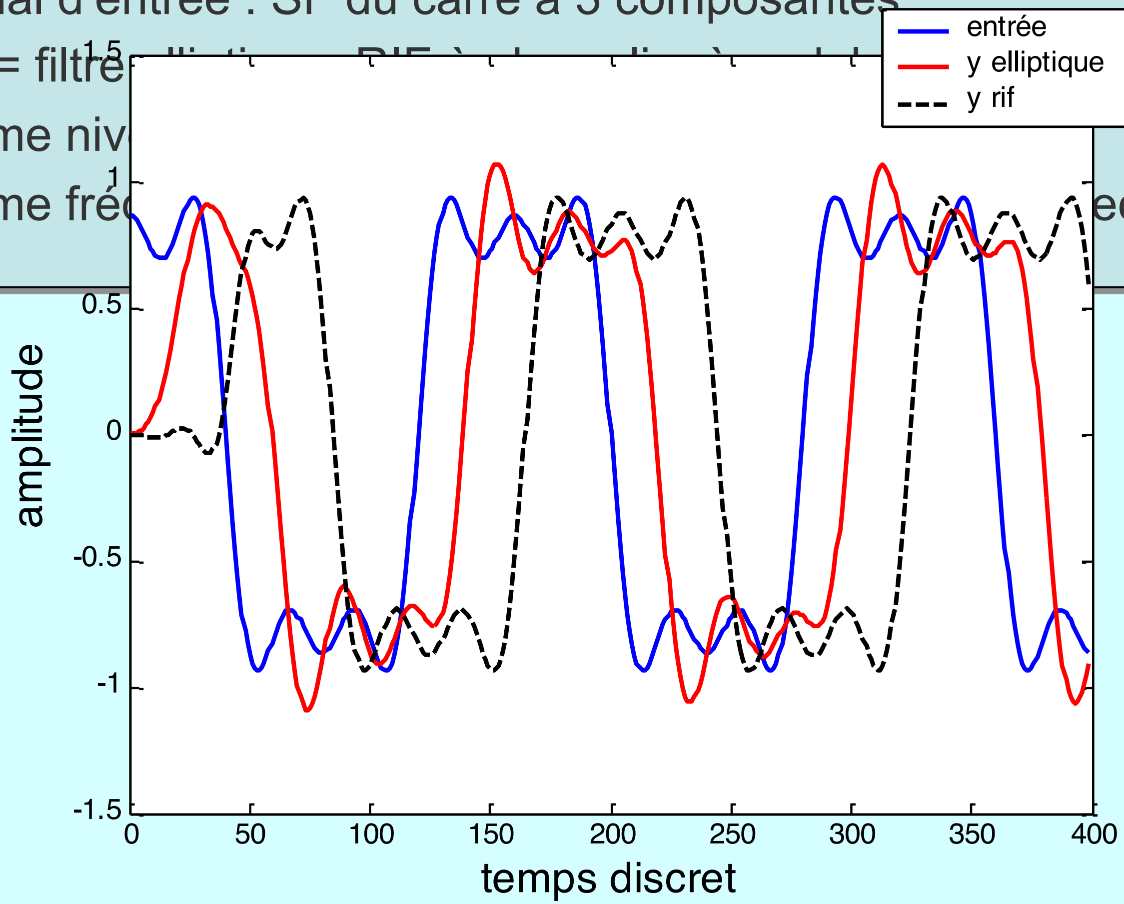
- *propriété* : si le support fréquentiel du signal d'entrée est dans la bande passante (avec $H_R(\nu)$=c dans la BP), alors ■

$$y(n) = dx_a(n-\alpha)$$

où $x_a(t)$ est la reconstruction parfaite analogique à partir des échantillons $x(n)$ à la cadence 1.

Exemple IIR (phase NL) vs FIR à phase lin.

- signal d'entrée : SF du carré à 3 composantes
- IIR = filtre ... ntes
- même niv
- même fré ... ectre d'entrée



Symétrie de la réponse impulsionnelle

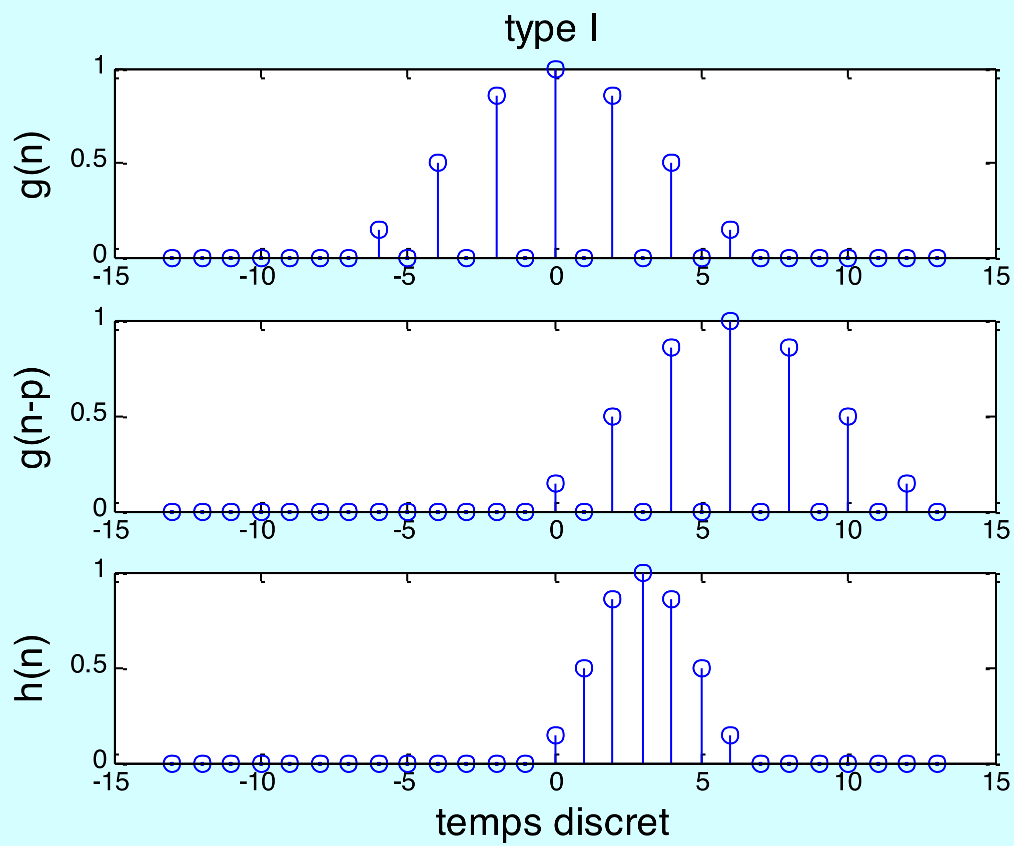
- on considère un filtre *h(n)* causal, réel, à phase linéaire. Montrer que α est nécessairement un demi-entier, $\alpha = p/2 \quad p \in \mathbf{Z}$
- en déduire que $H_R(\nu)$ est au moins périodique de période 2.
- Montrer que $d = e^{j2\pi\beta}$ vaut 1 ou *j*.
- On pose $G(e^{j2\pi\nu}) = H_R(2\nu)$. Etudier les symétries possibles pour g(n). Montrer la relation

$$H(z^2) = d\, z^{-p}\, G(z)$$

- interpréter le résultat en terme de suréchantillonnage. En déduire la valeur de *p* en fonction de la longueur *N* de la RI (un croquis peut aider).

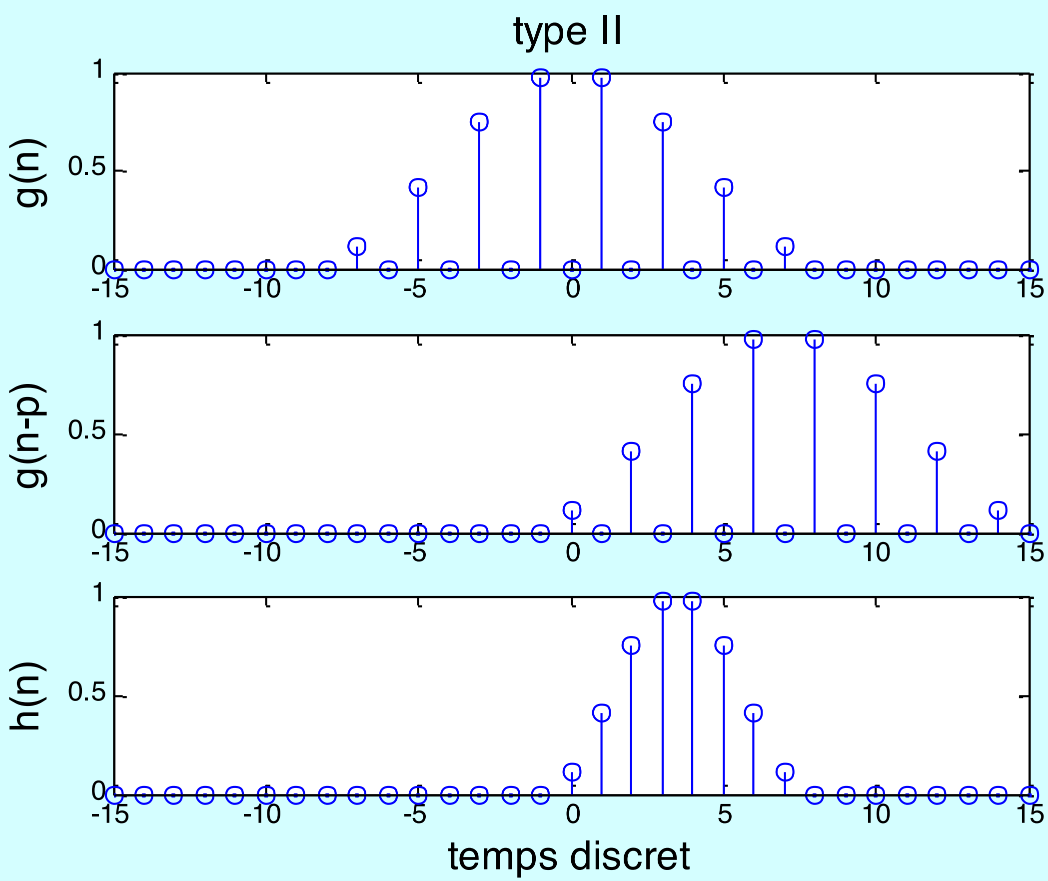
Cas longueur impaire, α entier

- si d=1 : *G* est paire, réelle ➔ *g* est paire et réelle.



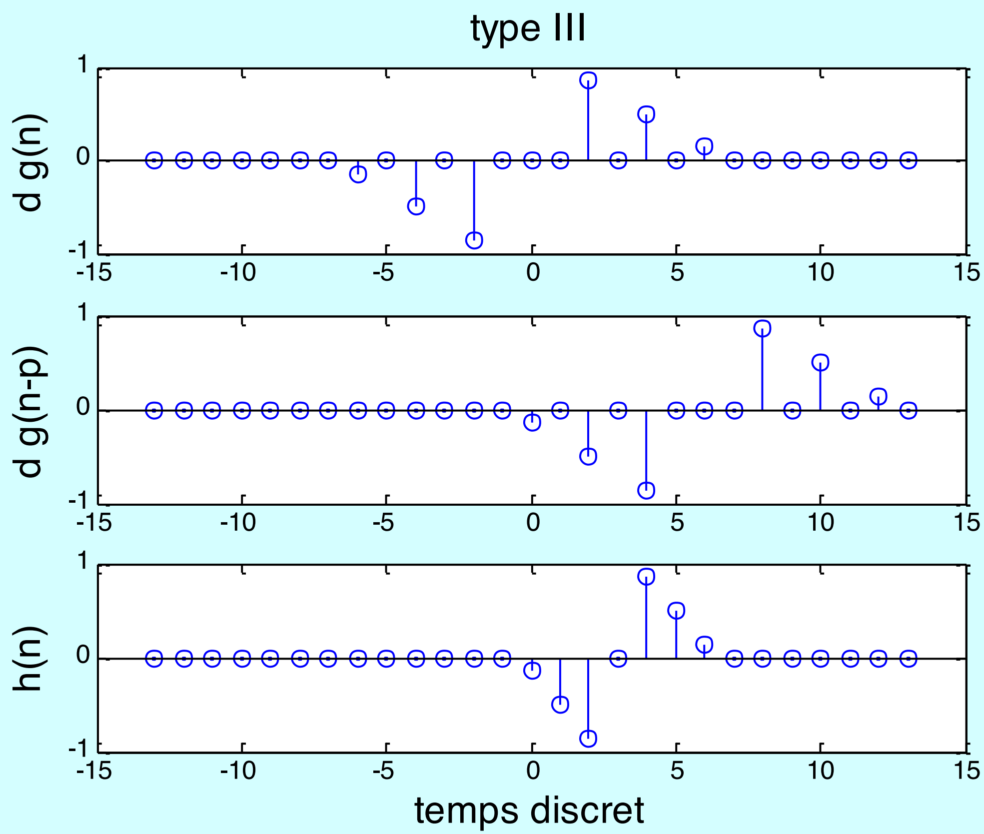
Cas longueur paire, α demi-entier

- si d=1 : *G* est paire, réelle ➔ *g* est paire et réelle.



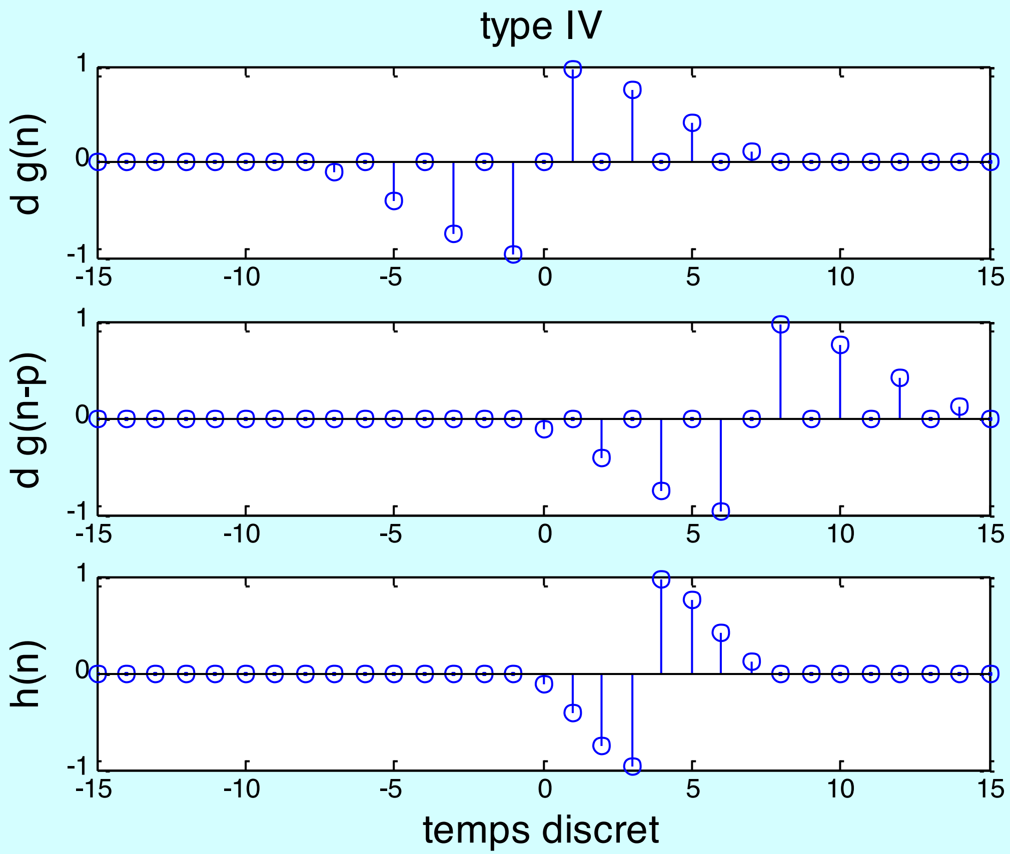
Cas longueur impaire, α entier

- si d=j : *G* est impaire, réelle ➔ *g* est impaire et imaginaire.

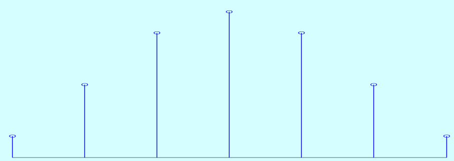
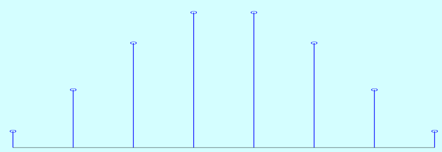
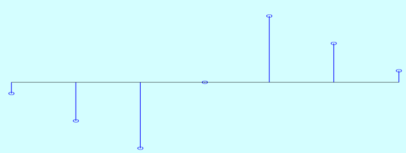
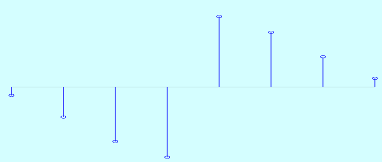


Cas longueur paire, α demi-entier

- si d=j : *G* est impaire, réelle ➔ *g* est impaire et imaginaire.



En résumé

Type I N impair symétrique		-	Passe-bas Passe-Haut Passe-Bande
Type II N pair symétrique		H(-1) = 0	Passe-bas, Passe-bande
Type III N impair anti-sym.		H(0)= H(-1) = 0	Différentiateur, Transformateur de Hilbert, Passe-bande
Type IV N pair anti-sym.		H(0) = 0	Différentiateur, Transformateur de Hilbert, Passe Haut

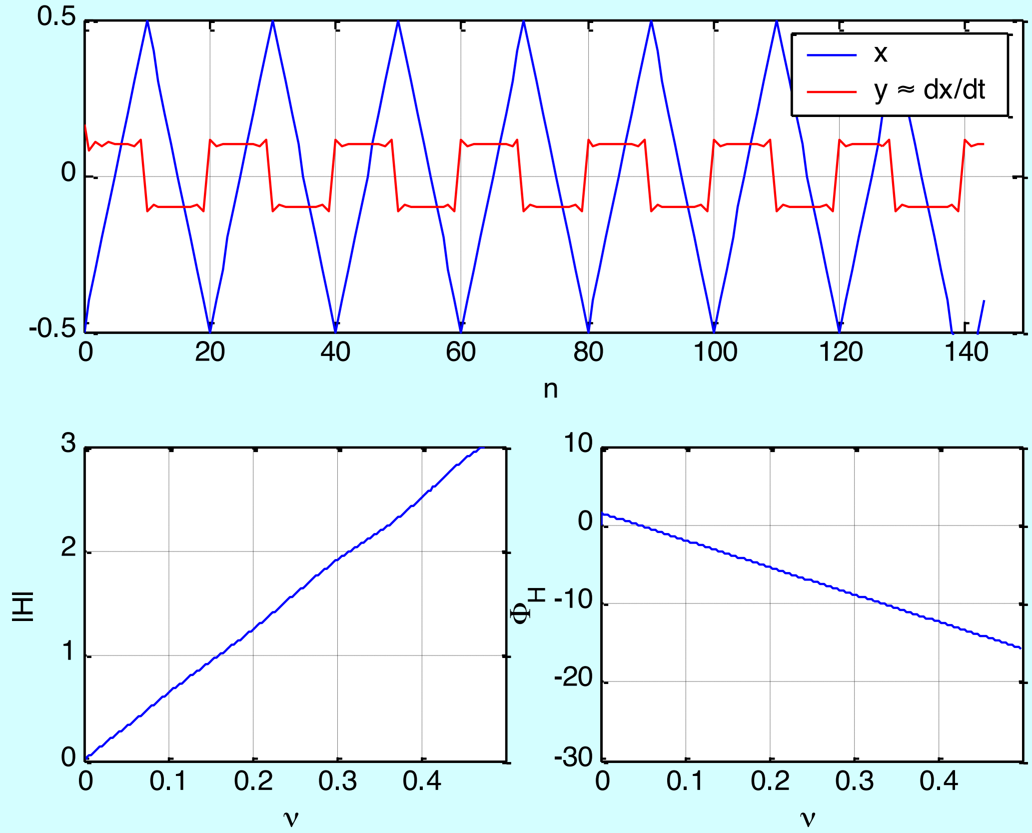
Filtres spéciaux

- lié au facteur *j* dans la réponse en fréquence des types III et IV.
- *Différentiateur* : réalise une approximation de l'opérateur différentiel en temps, dans le domaine fréquentiel :

$$H(e^{j2\pi\nu}) = j2\pi\nu F_e$$

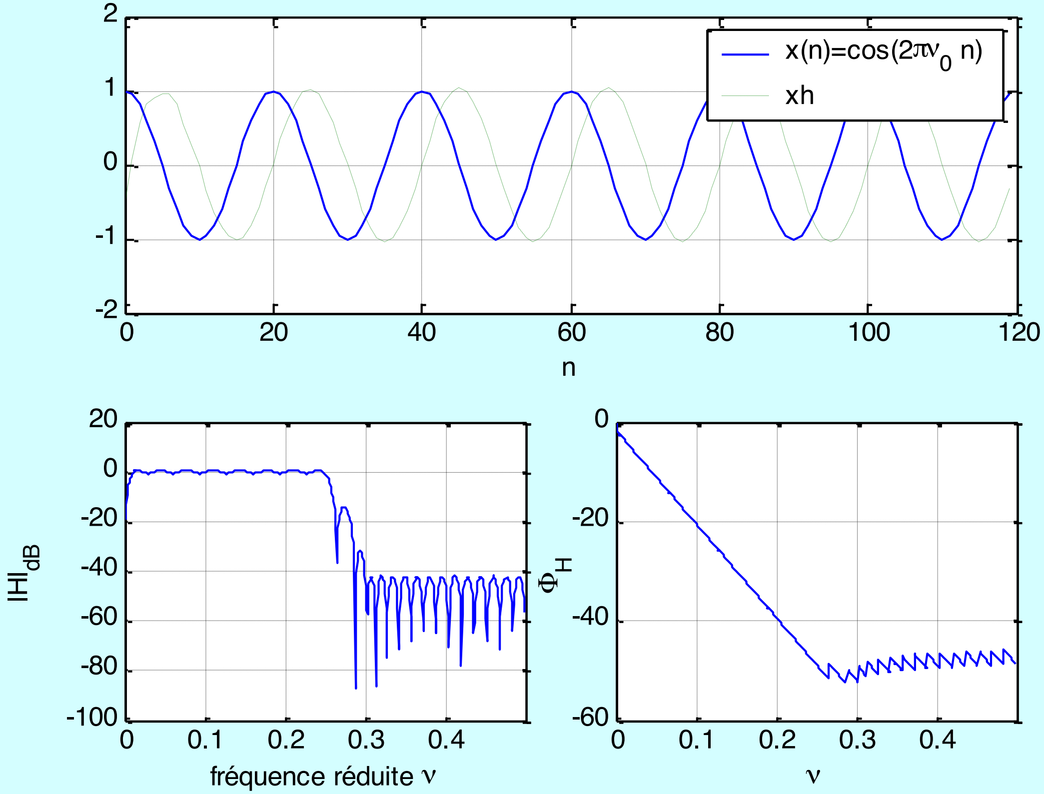
- *Transformateur de Hilbert*. Soit *H* la réponse en fréquence du filtre linéaire tel que
  - *H: x(n) → x_h(n)*
  - *H:* $\cos(2\pi\nu_0\, n) \rightarrow \sin(2\pi\nu_0\, n)$, $\forall\, \nu_0 \in [-0.5\ 0.5]$
- Déterminer la fonction $H(e^{j2\pi\nu})$ pour $\nu \in\ ]-0.5\ 0[\ \cup\ ]0\ 0.5[$. Préciser ensuite sa valeur aux points 0 et 0.5
- En déduire l'intérêt présenté par les types III et IV pour réaliser le filtre *H.*
- *Signal analytique.* Soit le filtre *H_a: x(n) → x_a(n) = x(n)+j x_h(n).* *x_a(n)* est le *signal analytique* associé au signal réel *x(n)*.

Différentiateur : exemple




```
h = firpm(11,[0 0.49]*2,[0 2*pi*.49],'d');
```

Transformateur de Hilbert : exemple



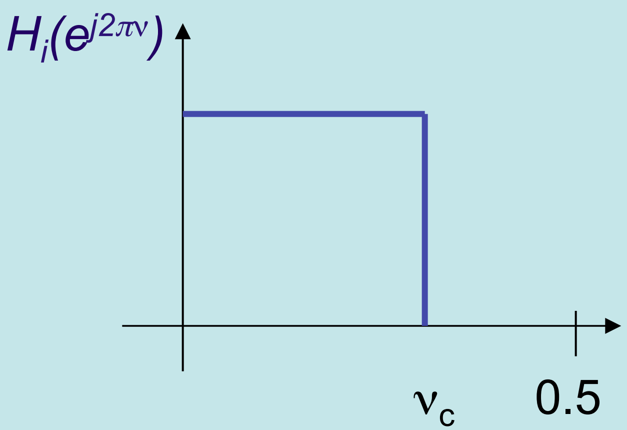

```
h = firpm(60,2*[.01 .25 .3 .5],[1 1 0 0],[1 10],'h');
```

Synthèse : méthodes pour les RIF

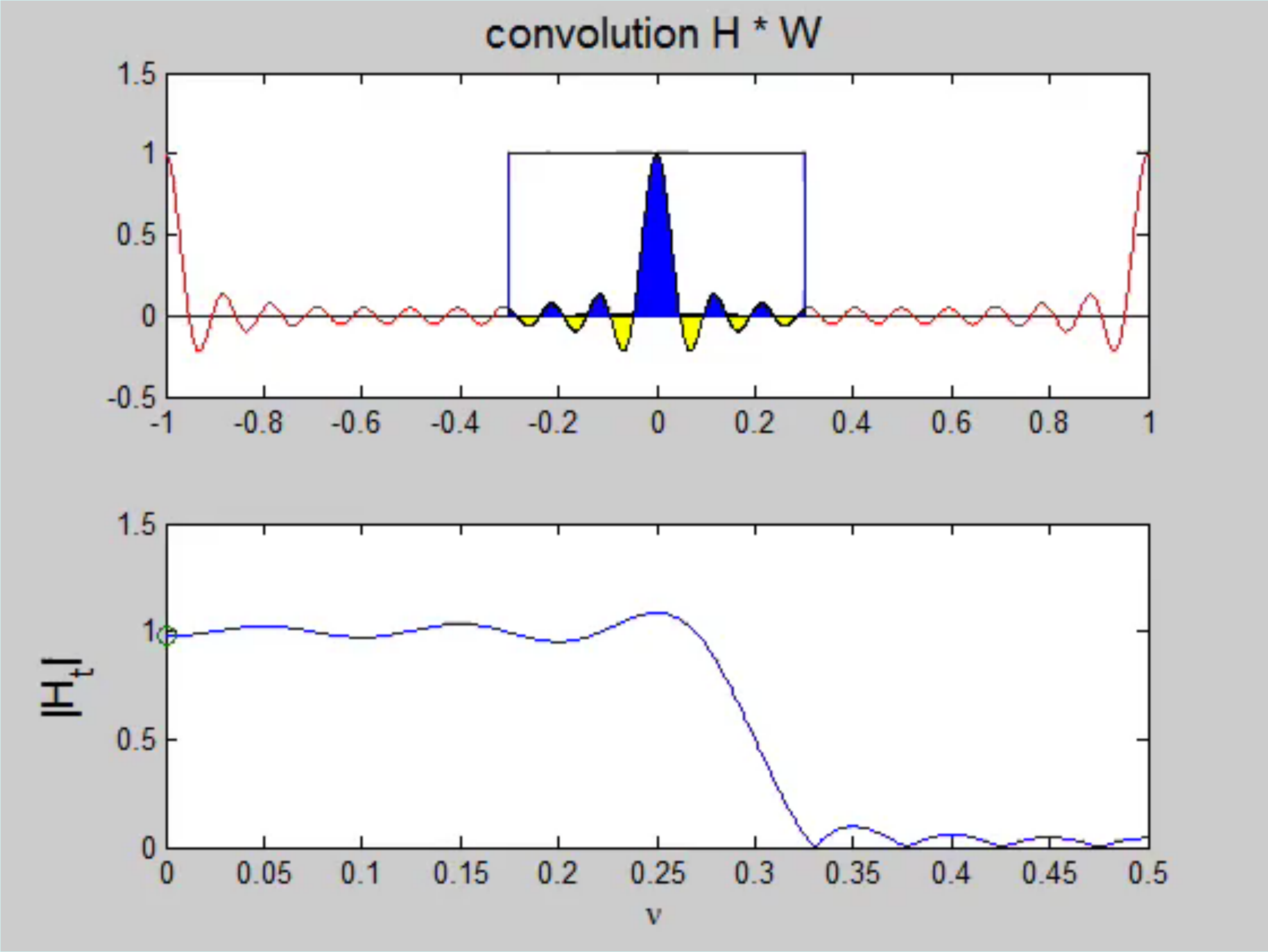
- méthode de la fenêtre : permet de comprendre le compromis à atteindre entre le niveau d'ondulation et la largeur de transition
- méthode d'optimisation sous contrainte, notion de « filtre propre »
- méthode d'optimisation par minimisation de la norme L_∞ d'une fonction d'erreur pondérée.

Synthèse à fenêtre

- Algorithme simple :
  - inversion de $H_{idéal}$
  - troncature symétrique ≡ multiplication par une fenêtre finie
  - décalage pour rendre le filtre causal
- Donne nécessairement type I ou III (*N* impair)
- Exemple :
  - soit $H_i(e^{j2\pi\nu})$ ci-contre
  - calculer $h_i(n)$
  - en déduire h(n) par troncature rectangulaire de longueur 2P-1, P = 4.
  - Représenter $H(e^{j2\pi\nu})$



Synthèse à fenêtre : Gibbs et transition



Optimisation de la synthèse à Fenêtre

Fenêtre paramétrable de Kaiser

- qques pb liés à la méthode à fenêtre
  - ajuster indépendamment le niveau d'ondulation en bande coupée et la largeur de transition
  - le niveau d'ondulation est le même en bande coupée et passante
- fenêtre de Kaiser
  - dépend d'un paramètre β qui ajuste δ_2 en bande atténuée
  - on joue ensuite sur la longueur du filtre pour la bande de transition
  - longueur $N = 2M+1$, I_0 : fonction de Bessel modifiée de 1ere espèce

$$w(n) = \frac{I_0(\beta\sqrt{1 - n^2/M^2})}{I_0(\beta)}$$

Optimiser la fenêtre sous contrainte

Prolates sphéroïdes

- on cherche à maximiser l'énergie en bande passante sous contrainte unitaire, *i.e.*
  - on cherche $\underset{h}{\text{argmax}} \int_{-\nu_c}^{\nu_c} |H(e^{j2\pi\nu})|^2 \, d\nu$
  - sous contrainte $\int_{-0.5}^{0.5} |H(e^{j2\pi\nu})|^2 \, d\nu = 1$
  - montrer que ce pb peut se ramener à la maximisation de la forme quadratique

$$Q = \mathbf{h}^H \mathbf{R} \mathbf{h}, \ \mathbf{R} = \int_{-\nu_c}^{\nu_c} \mathbf{e}(e^{j2\pi\nu}) \mathbf{e}^H(e^{j2\pi\nu}) \, d\nu$$

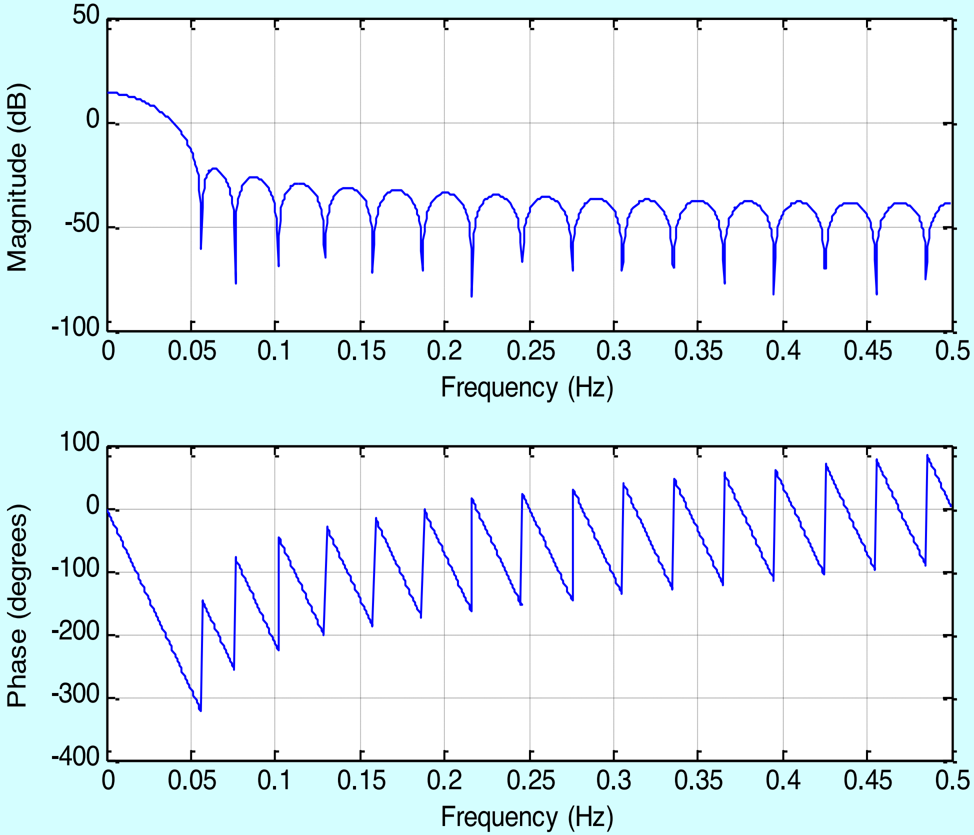
sous la contrainte $\mathbf{h}^H \mathbf{h} = 1$, avec $\mathbf{e}(\mathbf{z}) = [1 \; z^{-1} \; \ldots \; z^{-N+1}]^T.$

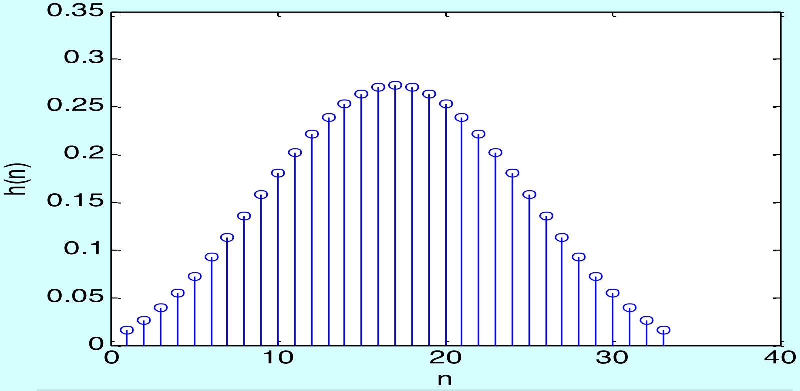
Optimiser la fenêtre sous contrainte

Prolates sphéroïdes et filtres propres

- terme général de **R :** $r_{mn} = 2\nu_c \mathrm{sinc}(2\nu_c(m-n))$
- définie positive (forcément)
- *algorithme de calcul*
  - *1. calcul de **R***
  - *2. décomposition aux valeurs propres*
  - *3. h = vecteur propre unitaire associé à la plus grande valeur propre*
- extension : contrainte en minimisation d'erreur quadratique sur les différentes bandes → filtres propres.

Exemple






```
clear all
nu0 = 0.05; % freq de coupure
N = 33 ;    % longueur du filtre
n = 0:N-1;

L1 = sincard(2*pi*nu0*n)
R = nu0*toeplitz(L1);
[V,lambda]=eig(R,'nobalance');
lambda = diag(lambda);
ind = find(lambda==max(lambda));

h = V(:,ind);
```

Méthodes itératives : principe

- rappel : la forme de la rf = $H(e^{j2\pi\nu}) = e^{-j2\pi\nu(\frac{N-1}{2})} H_R(\nu)$
- on cherche à minimiser *le maximum* d'une erreur pondérée

$$\boxed{E(\nu) = W(\nu)(D(\nu) - H_R(\nu)),\ \nu \in B}$$

- soit $$h_m = \underset{h}{\text{Argmin}}\ \|E(\nu)\|_\infty,$$ $$\|E(\nu)\|_\infty = \max_B E(\nu).$$

illustration de l’erreur pondérée (Chebychev)

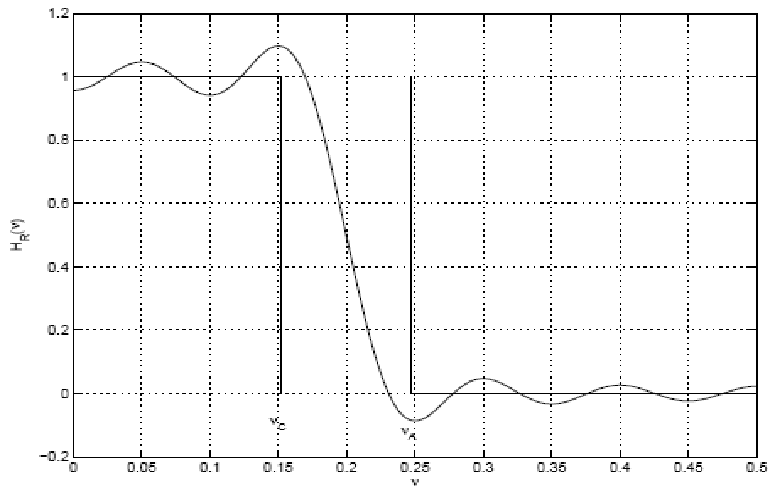


FIG. 22 – Réponse obtenue et réponse idéale d’un filtre passe ba

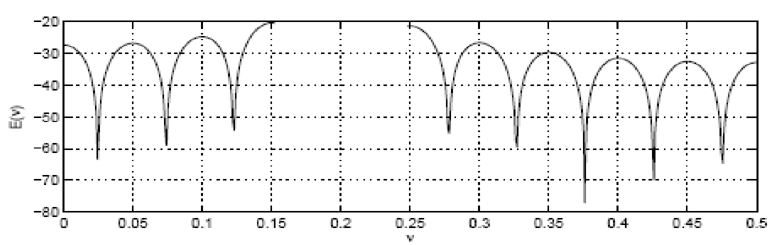


FIG. 23 – Erreur en dB dans le domaine B

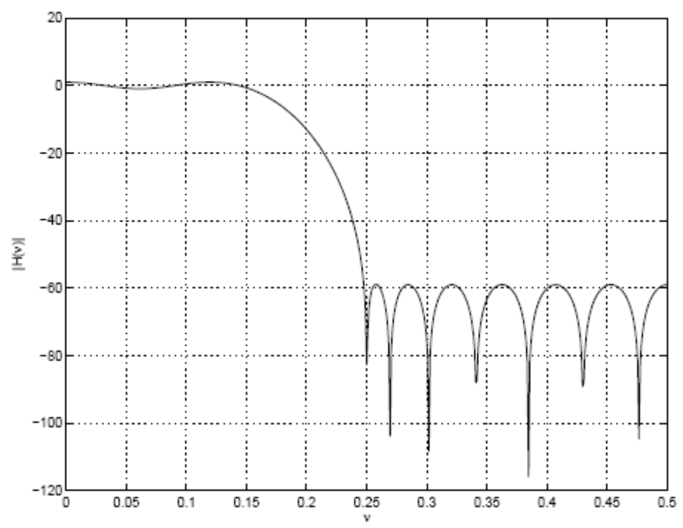


FIG. 24 – Filtre obtenu après optimisation avec des poids 1 et 100 respectivement pour la bande passante et la bande coupée.

algorithme d'échange (remez)

Sur un exemple de type I (*N* impair, symétrique)

- Montrer que la réponse zéro-phase s'écrit sous la forme

$$H_R(e^{i2\pi\upsilon}) = \sum_{n=0}^{M} a_n \cos 2\pi\upsilon n$$

- On en déduit qu'on peut encore l'écrire sous la forme d'un polynôme en $c(\nu) = \cos(2\pi\nu)$ soit :

$$H_R(e^{i2\pi\upsilon}) = \sum_{k=0}^{M} b_k c(\upsilon)^k$$

  qui admet une dérivée =0 en 0 et M-1 autres maxima
- algorithme d'échange :
  - 0: init : on réparti dans *B* les candidats au max en prenant les bords
  - 1: a l'aide d'une interpolation, on calcule les coeffs du polynome
  - 2: on recalcule les candidats comme les max du polynome
  - 3: retour à 1 jusqu'à convergence de l'erreur

algorithme d’échange (remez)